

UPST

# DS n°5 - Correction

PROTHÈSE ACTIVE TRANSTIBIALE **Concours Commun Mines-Ponts PSI 2013** CORRIGÉ



D'après le corrigé fourni par l'UPSTI, modifié et complété. http://www.upsti.fr/

# Analyse de l'ensemble transtibial lors de la marche

#### Identification des phases de la marche Question 1.



#### Vitesse angulaire maximale du pied

Un cycle est formé de deux pas. La marche normale est effectuée à une cadence Cad = 105 pas/min . Le temps de cycle est donc :  $T_c = \frac{2 \cdot 60}{Cad}$ . A.N. :  $T_c = 1,14$  s

La vitesse de rotation maximale de la cheville est observée durant la sous phase PP. La mesure de la pente sur la courbe fournie permet d'estimer :  $\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{max}} \approx \frac{40}{0.15 \cdot T_{\mathrm{C}}} \mathrm{en}^{\circ}/\mathrm{s}$ . Soit encore  $\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{max}} \approx 4 \mathrm{ rad/s}$ 

# Définition du cahier des charges

Vérification des critères du cahier des charges Question 2.

Critères	Valeurs du CDC	Valeurs relevées	
Valeurs extrêmes de l'angle $\theta$	Flexion plantaire		
	Propulsive : -25°	-20°	
	Dorsiflexion : 15°	10°	
Vitesse angulaire maximale $\dot{\theta}_{max}$	5,2 rad.s <sup>-1</sup>	4 rad.s <sup>-1</sup>	
Couple maximal à fournir	140 Nm	127 Nm	
Travail maximal à fournir	20 J	14 J	

Conclusion : Le cahier des charges de la prothèse est légèrement plus exigeant que les relevés expérimentaux faits sur une marche normale : cela est cohérent.

# Définition de la loi de consigne



#### On mesure :

$K_n = 2$	134 Nm/rad	$K_p = 516 \text{ Nm/rad}$	$C_{\rm lim} = 85 \ {\rm Nm}$	$\Delta C = 44 \text{ Nm}$	
-----------	------------	----------------------------	-------------------------------	----------------------------	--

#### Question 3. Détermination des paramètres de la loi de consigne



Organisation structurelle de la prothèse active

**Ouestion 4.** Chaîne d'énergie et chaîne d'informations



## Gestion des modes de commande

Variables binaires de commande Question 5.



Question 6. Diagramme d'états de commande du mode C3



## Modélisation de la chaîne de transmission

Longueur du vérin en fonction de l'angle du basculeur Question 7.

L'équation de fermeture géométrique du mécanisme s'établit ainsi :

 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ , soit encore  $a \cdot \vec{z}_0 - \lambda(t) \cdot \vec{y}_3 + b \cdot \vec{y}_2 = \vec{0}$ 

On projette cette équation par exemple dans la base  $B_2$ :  $\begin{cases} a\sin\alpha - \lambda\cos(\beta - \alpha) + b = 0\\ a\cos\alpha - \lambda\sin(\beta - \alpha) = 0 \end{cases}$ 

On en déduit :  $\lambda = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\sin\alpha}$ 

#### Forme linéarisée

A partir de l'illustration 9, on peut proposer une forme linéarisée de cette fonction pour un angle  $\alpha$  du basculeur appartenant à l'intervalle ]-15°;25° [:



On se limitera aux valeurs absolues pour la suite pour simplifier.

D'où : 
$$\left| R_T \right| = \frac{kp_v}{K_c}$$
. A.N. :  $\left| R_T \right| = \frac{1}{2,1} \cdot \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{1}{33,2} = \frac{6}{6} \cdot \frac{10^{-3}}{3}$  (sans dimension)  
Alors,  $\left| \frac{\left| \frac{d\alpha}{dt} \right|}{dt} \right| = \left| R_T \right| \frac{\pi N_M}{30}$ . A.N. :  $\left| \frac{d\alpha}{dt} \right|_{\max} = \left| \frac{d\theta}{dt} \right|_{\max} = 5,4 \text{ rad/s}$ 

Conclusion : La vitesse de rotation de la cheville obtenue à partir de la vitesse de rotation nominale du moteur (fonctionnement à vide) est supérieure à l'exigence du cahier des charges (5,2 rad/s). De ce point de vue, le moteur est validé

#### Modélisation du comportement inertiel du pied artificiel

Question 10. Position du centre d'inertie ; forme simplifiée de la matrice d'inertie

 $(O, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  semble être plan de symétrie matérielle du pied artificiel; alors théoriquement :

• Le centre d'inertie G appartient à ce plan ( $x_{OG} = 0$ )

La matrice d'inertie est de la forme 
$$I_G = \begin{bmatrix} L_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & L_{YY} & -L \end{bmatrix}$$



Les produits d'inertie  $L_{xy}$  et  $L_{xz}$  sont en effet négligeables devant les autres termes de la matrice, ce qui est conforme à la forme attendue avec une symétrie parfaite du pied.

Moment d'inertie du pied

On détermine le moment d'inertie du pied selon l'axe  $(O, \vec{x})$  par le théorème de Huygens :

 $J_p = L_{XX} + M(y_{OG}^2 + z_{OG}^2)$ . A.N. :  $J_p = 6 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 

#### *Question 11.* Inertie équivalente de l'ensemble {pied+arbre moteur}

On note  $\Sigma$  l'ensemble {pied+arbre moteur}. Toutes les autres pièces ont leurs masses et inerties négligées. L'énergie cinétique de cet ensemble dans le référentiel tibia se calcule ainsi :

$$T(\Sigma/0) = T(pied/0) + T(arbre moteur/0), \text{ soit } T(\Sigma/0) = \frac{1}{2}J_p \left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}J_M \omega_M^2.$$

On en déduit

$$T\left(\Sigma/0\right) = \frac{1}{2}J_{p}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)^{2} + \frac{1}{2}\frac{J_{M}}{R_{T}^{2}}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)^{2} = \frac{1}{2}\left[J_{p} + \frac{J_{M}}{R_{T}^{2}}\right]\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)^{2}$$

L'inertie équivalente de l'ensemble {pied+arbre moteur} ramenée sur l'axe de rotation de la cheville  $(O, \vec{x})$  est donc :

$$\int_{\phi_{\text{qui}}} = J_p + \frac{J_M}{R_T^2} \quad \text{A.N.} : \int_{\phi_{\text{qui}}} = 6.10^{-3} + \frac{1.34.10^{-5}}{(6.8.10^{-3})^2} = 0.29 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

 $\underline{L'inertie \ du \ pied} \ \left(6\cdot 10^{-3} kg\cdot m^2\right) \ \underline{est \ negligeable} \ devant \ celle \ de \ l'arbre \ moteur \ \left(0,29 \ kg\cdot m^2\right) \ dans \ la$ dynamique de l'ensemble {pied+arbre moteur} en rotation autour de l'axe  $(O, \vec{x})$ 

# Comportement dynamique de la prothèse

**Question 12.** Relation entre C et  $F_{RS}$ 

On isole le pied 1, soumis à :

- L'action du tibia 0
- L'action des ressorts
- Au couple extérieur

Le théorème du moment dynamique appliqué en O au pied 1 en mouvement dans le référentiel tibia 0 supposé galiléen, en projection sur  $\dot{x}$ , s'écrit :

$$\underbrace{\vec{\delta}(O,1/0)\cdot\vec{x}}_{=0} = \underbrace{\vec{M}(O,0\to1)\cdot\vec{x}}_{=0} + \underbrace{\vec{M}(O,ressorts\to1)}_{OS\wedge F_{RS}}\cdot\vec{x} - C\cdot\vec{x}$$
  
inertie négligée liaison parfaite  $OS\wedge F_{RS}\cdot\vec{n}_{1}$   
D'où, après quelques calculs vectoriels :  $\boxed{C = bF_{RS}\cos(\delta + \theta - \alpha)}$ 

**Question 13.** Relation simplifiée <u>à l'ordre 0</u> autour de la position repos On pose  $\delta = \delta_R$ ,  $\theta = \theta_R + \Delta \theta$  et  $\alpha = \alpha_R + \Delta \alpha$ .

Alors, la relation obtenue à la question précédente s'écrit :

$$C = b F_{RS} \cos\left(\delta_{R} + \Delta\theta - \alpha_{R} - \Delta\alpha\right) = b F_{RS} \cos\left((\delta_{R} - \alpha_{R}) + (\Delta\theta - \Delta\alpha)\right)$$
$$C = b F_{RS} \left[\cos\left(\delta_{R} - \alpha_{R}\right) \underbrace{\cos(\Delta\theta - \Delta\alpha)}_{= 1 \text{ à l'ordre } 0} - \sin\left(\delta_{R} - \alpha_{R}\right) \underbrace{\sin(\Delta\theta - \Delta\alpha)}_{= 0 \text{ à l'ordre } 0}\right] \approx b F_{RS} \cos\left(\delta_{R} - \alpha_{R}\right)$$

On en déduit :

$$C = d_0 F_{RS} \text{ avec } d_0 = b \cos(\delta_R - \alpha_R).$$

L'allongement des ressorts s'exprimant 
$$\Delta \chi = d_0 \left( \Delta \alpha - \theta \right) = \frac{F_{RS}}{k_{RS}}$$
, on en déduit que

$$C = d_0 F_{\rm \scriptscriptstyle RS} = d_0 k_{\rm \scriptscriptstyle RS} \Delta \chi = k_{\rm \scriptscriptstyle RS} d_0^2 \left( \Delta \alpha - \theta \right) \ \, {\rm ou\ encore}: \ \, \frac{C}{\Delta \alpha - \theta} = k_{\rm \scriptscriptstyle RS} d_0^2$$

D'où la fonction de transfert :

# $H_7(p) = k_{RS} d_0^2$

**Question 14.** Puissance des inters efforts générés par le ressort  $P(ressort \Leftrightarrow prothèse) = P(ressort \rightarrow 1/2), c'est-à-dire P(ressort \Leftrightarrow prothèse) = \overline{R}(ressort \rightarrow 1) \cdot \overline{V}(S, 1/2).$   $\overline{V}(S, 1/2) = \overline{SO} \wedge \overline{\Omega}(1/2) = b \cdot \overline{z}_2 \wedge \left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt}\right) \cdot \overline{x}.$   $D'où : P(ressort \Leftrightarrow prothèse) = b F_{RS}\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt}\right) \cos(\delta + \theta - \alpha)$ 

#### Question 15. Dynamique de la cheville

On isole la prothèse et on lui applique le théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel tibia supposé galiléen :

 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T\left(\text{prothèse / 0}\right) = P\left(\overline{\text{prothèse}} \rightarrow \text{prothèse / 0}\right) + P_i\left(\text{prothèse}\right)$ 

- $P(\overline{prothèse} \rightarrow prothèse/0) = -C\frac{d\theta}{dt}$ , les liaisons pivot  $3_2/0$  et 1/0 étant supposées parfaites ;
- $P_i(prothèse) = \underbrace{C_M \omega_M}_{\text{moteur}} \underbrace{\mu_M \omega_M^2}_{\text{amortisseur}} + \underbrace{b F_{RS} \left( \frac{d\theta}{dt} \frac{d\alpha}{dt} \right) \cos(\delta + \theta \alpha)}_{\text{resert}}$

toutes les liaisons étant par ailleurs supposées parfaites ;

•  $T(prothèse / 0) = \frac{1}{2} J_M \omega_M^2$ , toutes les inerties des pièces autres que l'arbre moteur étant négligées.

On en déduit : 
$$J_M \omega_M \frac{d\omega_M}{dt} = -C \frac{d\theta}{dt} + C_M \omega_M - \mu_M \omega_M^2 + bF_{RS} \left( \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} \right) \cos(\delta + \theta - \alpha)$$

Où  $b\cos(\delta + \theta - \alpha) = d_0$  d'après la question 13.

Et donc : 
$$J_M \omega_M \frac{d\omega_M}{dt} = -C \frac{d\theta}{dt} + C_M \omega_M - \mu_M \omega_M^2 + d_0 F_{RS} \left( \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} \right)$$

#### Question 16. Fonctions de transfert mécaniques

L'équation fournie, au voisinage de la position repos, se met sous la forme :

$$\frac{J_M}{R_T^2} \frac{d^2 \Delta \alpha}{dt^2} + \frac{\mu_M}{R_T^2} \frac{d\Delta \alpha}{dt} = \frac{C_M}{R_T} - C$$

Soit par transformée de Laplace, les conditions étant celles d'Heaviside :  $\frac{p \cdot f_M + \mu_M}{R_T^2} \cdot \Delta \alpha'(p) = \frac{C_M}{R_T} - C$ .

On en déduit : 
$$H_1(p) = \frac{k_c}{R}$$
;  $H_2(p) = \frac{1}{R_T}$ ;  $H_3(p) = \frac{R_T^2}{p \cdot J_M + \mu_M}$ ;  $H_6(p) = k_c$ 

Identification d'un modèle de comportement de la chaîne d'énergie

#### Question 17. Fonction de transfert de la chaîne d'énergie

Le pied étant bloqué,  $\theta(p) = 0$ . On peut transformer le schéma bloc sous la forme suivante :



La fonction de transfert de la boucle interne est : 
$$\frac{H_3(p)}{1+H_3(p)H_4(p)H_7(p)}.$$

La fonction de transfert de l'ensemble est alors :

C(p)	$H_1(p)H_2(p)H_3(p)$	H (n)H (n)
$\overline{U_M(p)}$	$\frac{1}{1+H_3(p)H_4(p)H_7(p)+H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_5(p)H_6(p)}$	$\overline{p}^{11_4(p)11_7(p)}$

On remplace les fonctions de transfert par leurs expressions littérales :

$$\frac{C(p)}{U_{M}(p)} = \frac{k_{c} R_{T} k_{RS} d_{0}^{2}}{p^{2} \cdot R J_{M} + p \cdot (R \mu_{M} + k_{c}^{2}) + R R_{T}^{2} k_{RS} d_{0}^{2}} = \frac{\frac{k_{c}}{R R_{T}}}{1 + \frac{R \mu_{M} + k_{c}^{2}}{R R_{T}^{2} k_{RS} d_{0}^{2}} p + \frac{J_{M}}{R_{T}^{2} k_{RS} d_{0}^{2}}}$$

Les caractéristiques de cette fonction de transfert du second ordre de classe 0 sont, par identification :

$$K_{0} = \frac{k_{C}}{RR_{T}} ; \omega_{0} = R_{T} d_{0} \sqrt{\frac{k_{RS}}{J_{M}}} ; \xi_{0} = \frac{R\mu_{M} + k_{C}^{2}}{2RR_{T} d_{0} \sqrt{k_{RS} J_{M}}}$$

Question 18. Identification des caractéristiques de la fonction de transfert



- Le déphasage de -90° est obtenu à la fréquence  $f_0 \approx 11 \text{ Hz}$ , ce qui correspond à une pulsation propre  $\overline{\omega_0 \approx 70 \text{ rad/s}}$ .
- Une résonance est obtenue à une fréquence  $f_R \approx 10$  Hz liée à la précédente par  $f_R = f_0 \sqrt{1 2\xi_0^2}$

On en déduit  $\xi_0 \approx \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{10}{11}\right)^2\right)}$ , soit  $\left[\frac{\xi_0 \approx 0.3}{2}\right]$ , valeur assez imprécise car les 10 et 11 Hz le sont.

Question 19. Valeur expérimentale du moment d'inertie du moteur

De l'expression de la pulsation propre, on tire :  $J_M = k_{RS}$ 

$$_{RS}\left(\frac{R_T d_0}{\omega_0}\right)^2 \cdot \left| A.N. : \right|_M = 1.43 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

La valeur obtenue est <u>du même ordre de grandeur que l'inertie du moteur seul</u>. L'hypothèse selon laquelle on peut négliger les inerties des autres composants de la prothèse est <u>validée</u>.

#### Mise en place de l'asservissement de couple

#### Question 20. Schéma bloc de l'asservissement en couple



Fonction de transfert de l'adaptateur

On détermine le gain  $K_A$  de l'adaptateur de sorte que l'écart  $\varepsilon$  soit nul lorsque  $C = C_{\text{th}}$ , soit  $K_A C_{\text{th}} = \frac{K_{\text{capt}} d_0}{H(n)} C$ .

Sachant que  $H_7(p) = k_{RS} d_0^2$  d'après la question 13, il vient:  $K_A = \frac{K_{capt}}{k_{RS} d_0}$ 



**Question 21.** Réglage du correcteur proportionnel assurant la précision demandée  $H_{c}(p) = K_{corr}$ 

La fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement s'écrit donc :  $H_{bo}(p) = \frac{a_0 K_{cor}}{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}$ 

L'écart statique relatif  $er_s$  d'un système bouclé dont la fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 0 dépend du gain en boucle ouverte et s'écrit :  $\frac{1}{1+K}$ .

On en déduit 
$$er_s = \frac{1}{1 + a_0 \cdot K_{cor}}$$
.

Le cahier des charges impose un maximal de 10%. Donc il faut  $K_{cor} \ge \frac{9}{a_0}$ , soit  $K_{cor} \ge 3.1 \text{ V/(N.m)} = K_{cor1}$ 



#### Question 22. Réglage du correcteur proportionnel assurant les marges de stabilité demandées

Il faut abaisser la courbe de gain de 12 dB pour que le déphasage soit de -135° à la pulsation de coupure à 0 dB, ce qui assure une marge de phase de 45°.

On en déduit :  $K_{cor} \le 10^{\frac{12}{20}}$ , soit  $K_{cor} \le 0.25 \text{ V/(N.m)} = K_{cor2}$  pour satisfaire une marge de phase supérieure à 45°.

Conclusion relative à l'emploi d'un correcteur proportionnel :

Les exigences de précision et de stabilité se traduisent par des exigences incompatibles sur le gain du correcteur. Un correcteur proportionnel ne permet donc pas de satisfaire le cahier des charges.

#### *Question 23. Diagramme de Bode asymptotique du correcteur*

Le correcteur proposé est :

$$H_{\rm cor}(p) = K_p + K_d \frac{\tau_d \cdot p}{1 + \tau_d \cdot p}$$

Il peut se réécrire sous la forme canonique, puis numériquement :

$$H_{cor}(p) = K_p \frac{1 + \left(\frac{K_p + K_d}{K_p} \tau_d\right) \cdot p}{1 + \tau_d \cdot p} = 4.3 \frac{1 + 9.3 \cdot 10^{-3} p}{1 + 1.6 \cdot 10^{-3} p}$$

Il s'agit d'un <u>correcteur à avance de phase</u> dont le diagramme de Bode asymptotique (plus ici le diagramme réel, non demandé), s'obtient classiquement, avec :

- deux cassures, l'une à 1/9,3.10<sup>-3</sup>= 107,5 rad/s, l'autre à 1/1,6.10<sup>-3</sup>= 625 rad/s
- un gain statique de 20log4,3=12,7dB
- un gain aux hautes pulsations de 20log(4,3x9,3/1,6)=28dB
- dans la bande de correction un déphasage de +90° et une pente en gain de +20dB/décade.



Rôle des différents termes du correcteur :

- le gain statique K<sub>p</sub> permet de régler la précision du système
- les valeurs de  $K_d$  et  $\tau_d$ , à travers les valeurs relatives des deux cassures définissant la bande de correction, permettent alors d'ajuster la marge de phase.

NB : un autre point de vue, peut-être plus en accord avec la formulation de la question, peut être de revenir à l'écriture non canonique du correcteur fournie par l'énoncé :

$$H_{\rm cor}(p) = K_p + K_d \frac{\tau_d \cdot p}{1 + \tau_d \cdot p}$$

Avec ce point de vue on peut voir :

- une action proportionnelle de gain K<sub>p</sub> qui permet de régler la précision du système,
- une action dérivée qui améliore la stabilité, filtrée par un filtre passe bas du premier ordre afin d'éliminer l'amplification des hautes pulsations (en particulier les bruits).

Question 24. Validation des critères du cahier des charges

Voir constructions page suivante et tableau récapitulatif page suivante.

La marge de phase mesurée est de 45°. Ce qui valide le cahier des charges en termes de stabilité.

La réponse à un échelon de couple de 50 Nm tend vers 46 Nm, soit une erreur de 4 Nm. L'erreur relative est alors de <u>8%</u>, valeur inférieure à l'exigence du cahier des charges (10% max autorisé) qui est donc <u>validé</u> en termes de précision.

Le temps de réponse à 5% est estimé à 0.012 s, valeur très inférieure à la valeur imposée par le cahier des charges (0,1 s max), qui est donc également <u>validé</u> en termes de rapidité.



#### Tableau récapitulatif :

Critère	Exigence	Performance simulée	Validation
Marge de phase	45° (implicitement mini)	45°	Validée
Temps de réponse à 5%	Inférieur à 0,1s	0,012s	Largement validé
Erreur relative pour un échelon de couple	10% maxi	8%	Validée

Mais la courbe d'évolution de la tension de la commande du moteur fait apparaître une tension de démarrage de <u>1200V</u> !!! Cette valeur est énorme : le moteur ne peut supporter que 16V d'après l'annexe 4. On peut pallier ce défaut en ajoutant à la commande un <u>dispositif de</u> <u>saturation de la tension</u>. Cette saturation aura pour effet de <u>ralentir le système</u>, mais on peut espérer que le temps de réponse pratiquement 10 fois supérieur aux exigences en l'absence de cette saturation restera sous les 0,1s exigées, compte tenu de la rapidité de stabilisation de la tension à une valeur faible.

#### Evolution de la tension de commande de la prothèse



#### Validation clinique de la prothèse active

Question 25. Analyse comparative des performances de la prothèse active

La prothèse conventionnelle fournit autant d'énergie qu'elle n'en absorbe sur un cycle de marche (67J). Avec la prothèse active :

- 1. la moyenne du travail propulsif est plus forte (70J) soit 4,5% de plus ;
- 2. la moyenne du travail résistif est plus faible (53J) soit de 21% de moins.

L'utilisateur de la prothèse active doit donc sentir <u>une plus grande facilité à poser et à plier le pied</u> artificiel (21% d'énergie en moins), tout en ayant une <u>bonne propulsion</u> vers le pas suivant (4,5% d'énergie en plus).

Le coût métabolique moyen (COT) des patients à prothèse conventionnelle est 0,27. Ce chiffre descend à 0,23 lorsqu'une prothèse active est utilisée, soit un <u>abaissement de la dépense énergétique du patient de l'ordre de 15%</u>. La prothèse active permet donc d'abaisser significativement l'apport supplémentaire d'énergie que doit fournir la personne par rapport à un individu muni d'une prothèse conventionnelle.

