

# Manipulateur Festo EXCL 30

Corrigé UPSTI

## 1 Présentation

## 2 Établissement de la logique de commande

### 2.1 Description du processus normal

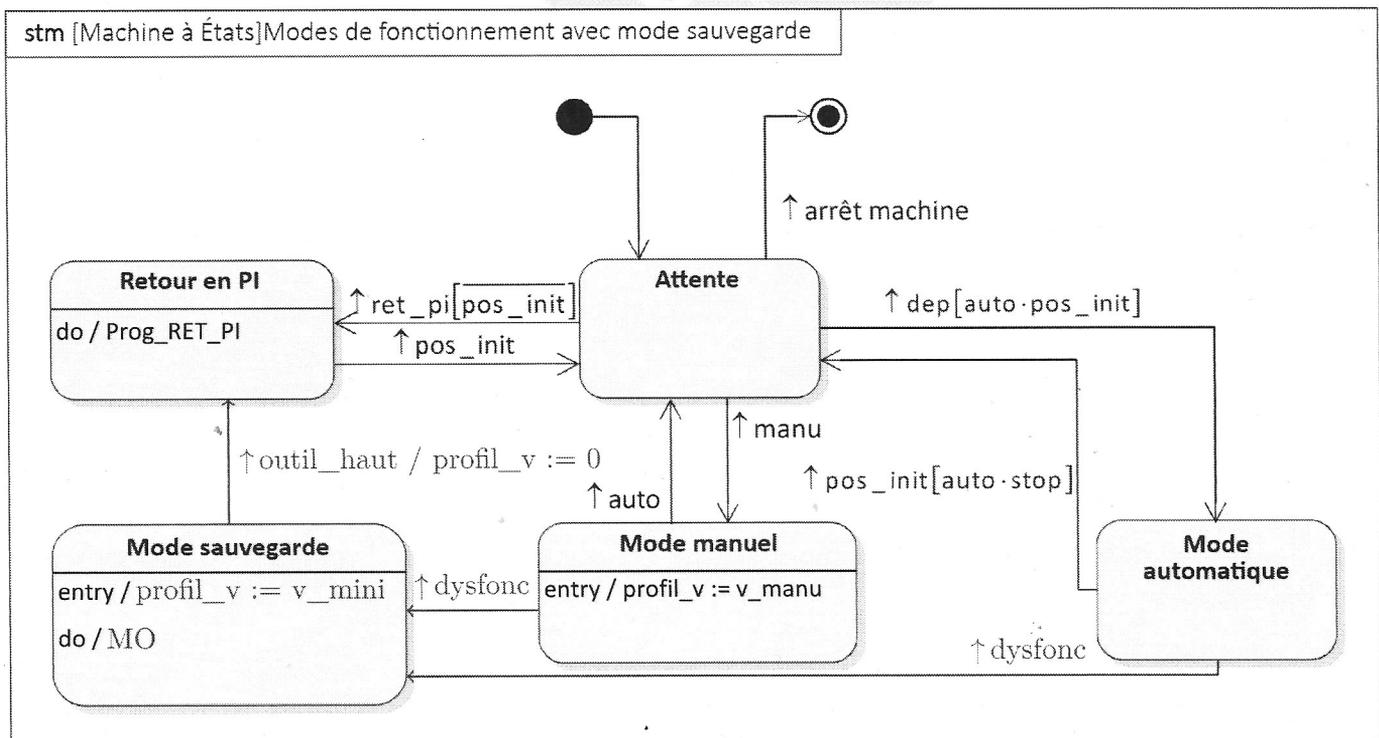
### 2.2 Élaboration d'un mode de fonctionnement « sauvegarde »

#### - Objectif

L'objectif de cette partie est d'améliorer la gestion automatisée du manipulateur et de préciser une logique de commande particulière.

**Question 1** Sur la figure R1 du document-réponses, tracer les liens et préciser les transitions autour de l'état « Mode\_sauvegarde » de manière à satisfaire le cahier des charges.

**Question 2** Sur la figure R1 du document-réponses, préciser dans l'état « Mode\_sauvegarde » les actions à effectuer de manière à satisfaire le cahier des charges.



## 2.3 Élaboration des consignes articulaires

### 2.3.1 Modèle géométrique direct

**Question 3** En supposant la poulie motrice P2 bloquée en position, analyser la conséquence de la rotation  $\Delta\theta_1$  dans le sens positif de la poulie motrice P1, sur la longueur de la courroie entre les points A et D. En déduire une relation entre  $\Delta\theta_1$ ,  $R_p$ ,  $\Delta l_{x1}$  et  $\Delta l_{y1}$ . Procéder de même (en inversant les rôles des poulies motrices P1 et P2) pour obtenir une relation entre  $\Delta\theta_2$ ,  $R_p$ ,  $\Delta l_{x2}$  et  $\Delta l_{y2}$ .

La longueur de courroie déroulée par une rotation  $\Delta\theta_1$  est  $R_p \cdot \Delta\theta_1$ . Cette longueur augmentera la longueur de courroie entre les points D et A. Ainsi :

$$\Delta\theta_1 \cdot R_p = \Delta l_{x1} + \Delta l_{y1} \text{ et } \Delta\theta_2 \cdot R_p = -(\Delta l_{x2} + \Delta l_{y2})$$

**Question 4** À partir des équations traduisant les contraintes géométriques, données précédemment, établir les quatre équations des contraintes géométriques entre les variations de longueur  $\Delta l_{u_i}$ .

$$\begin{array}{lcl} l_{x1} + l_{x3} = L_x & \Rightarrow & \Delta l_{x1} + \Delta l_{x3} = 0 \\ l_{y1} + l_{y2} = L_y & \Rightarrow & \Delta l_{y1} + \Delta l_{y2} = 0 \\ l_{x1} = l_{x2} & \Rightarrow & \Delta l_{x1} = \Delta l_{x2} \\ l_{x3} = l_{x4} & \Rightarrow & \Delta l_{x3} = \Delta l_{x4} \end{array}$$

**Question 5** Exprimer alors les variations de longueur  $\Delta l_{x2}$  et  $\Delta l_{y2}$  des brins de courroie en fonction de  $R_p$ ,  $\Delta\theta_1$  et  $\Delta\theta_2$ .

$$\begin{array}{lcl} \Delta\theta_2 \cdot R_p = -(\Delta l_{x2} + \Delta l_{y2}) & \Rightarrow & \Delta\theta_2 \cdot R_p = -\Delta l_{x2} - \Delta l_{y2} \\ \Delta\theta_1 \cdot R_p = \Delta l_{x1} + \Delta l_{y1} & \Rightarrow & \Delta\theta_1 \cdot R_p = \Delta l_{x2} - \Delta l_{y2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \Delta l_{x2} = \frac{\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2}{2} \cdot R_p \\ \Delta l_{y2} = -\frac{\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2}{2} \cdot R_p \end{array}$$

### 2.3.2 Modèle géométrique inverse

**Question 6** À partir du résultat de la question précédente, exprimer les consignes articulaires  $\Delta\theta_1$  et  $\Delta\theta_2$  en fonction des variations de coordonnées du chariot données par  $\Delta l_{x2}$  et  $\Delta l_{y2}$ .

$$\begin{array}{lcl} \Delta l_{x2} = \frac{\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2}{2} \cdot R_p & \Rightarrow & \Delta\theta_1 = \frac{\Delta l_{x2} - \Delta l_{y2}}{R_p} \\ \Delta l_{y2} = -\frac{\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2}{2} \cdot R_p & \Rightarrow & \Delta\theta_2 = -\frac{\Delta l_{x2} + \Delta l_{y2}}{R_p} \end{array}$$

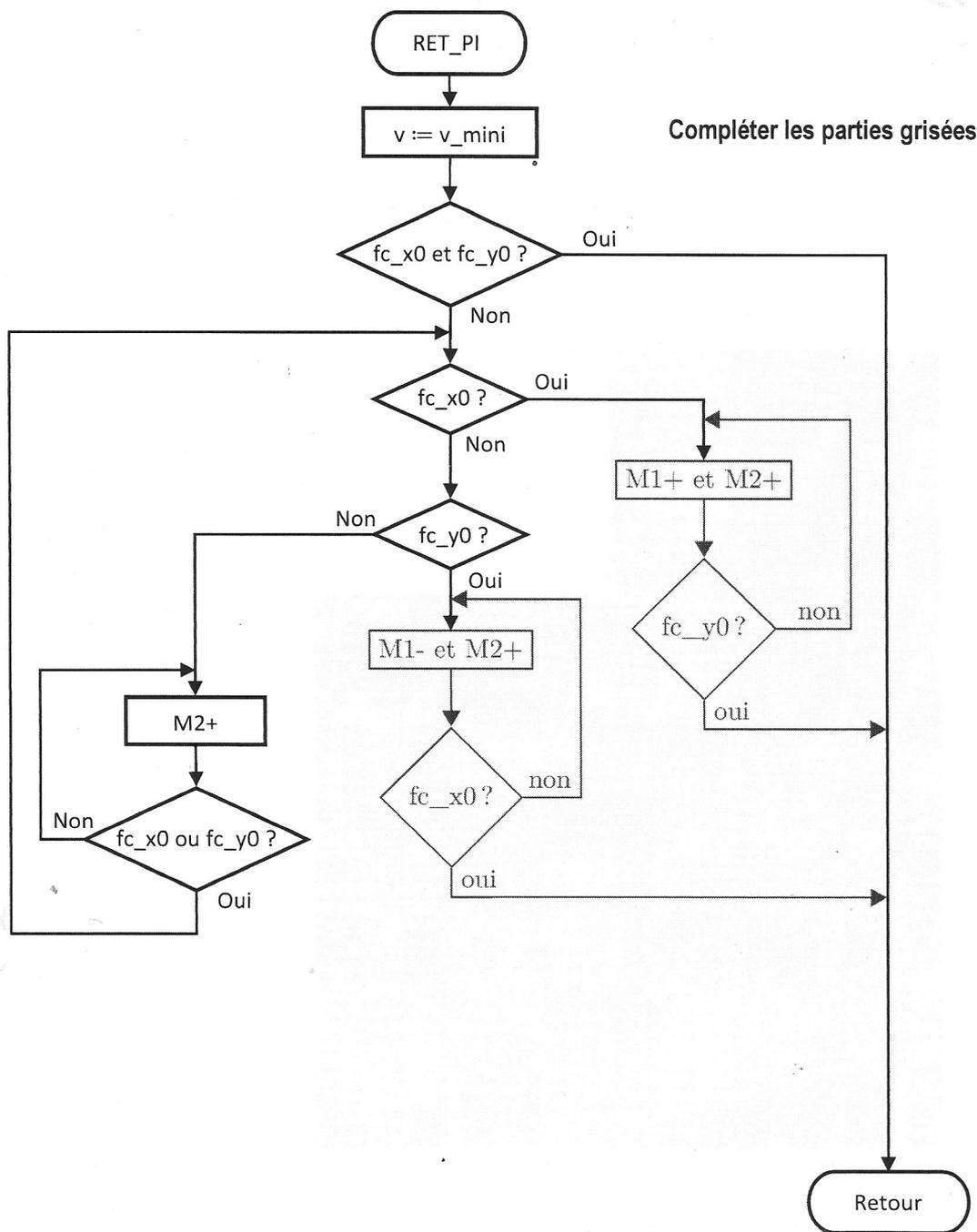
**Question 7** Indiquer quel(s) moteur(s) doit (doivent) tourner pour obtenir un déplacement longitudinal du chariot caractérisé par :  $\Delta l_{x2} > 0$  et  $\Delta l_{y2} = 0$ . Le cas échéant, préciser le sens de rotation (les valeurs des vitesses de rotation ne sont pas demandées).

Pour obtenir  $\Delta l_{x2} > 0$  et  $\Delta l_{y2} = 0$ , la question 5 nous conduit à  $\Delta\theta_1 > 0$  et  $\Delta\theta_2 = -\Delta\theta_1 < 0$ .

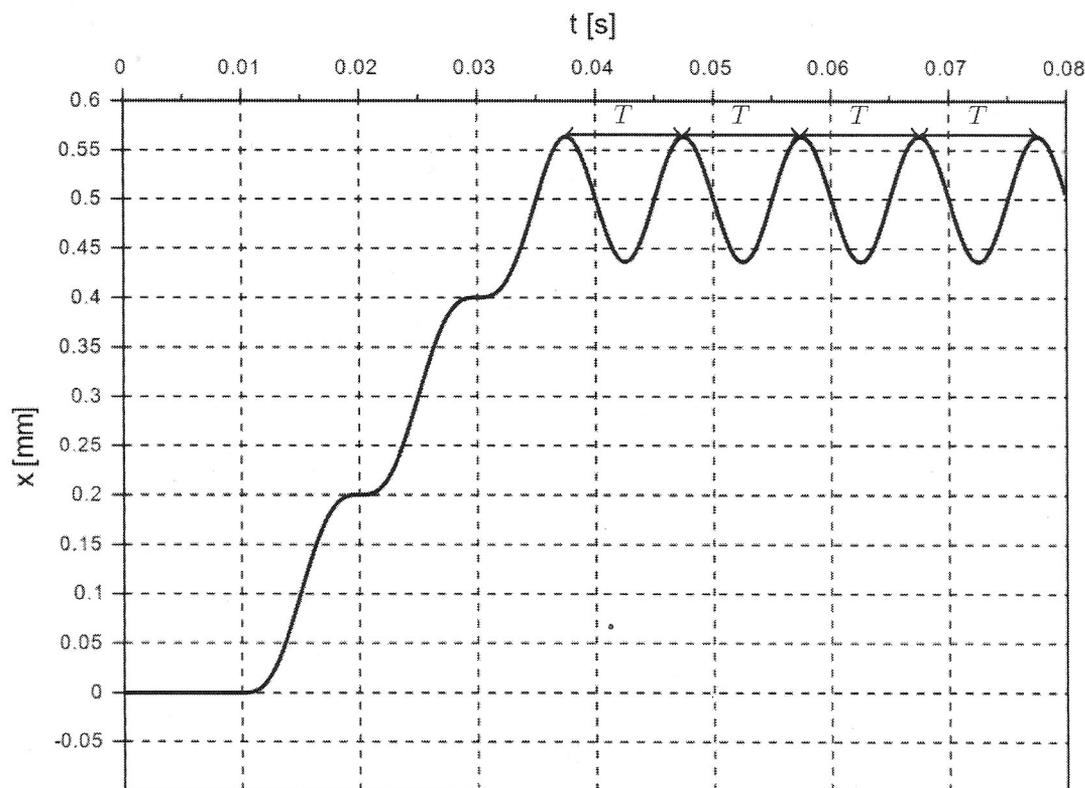
Moteur	Rotation (oui/non)	Sens (+/-)
M1	oui	+
M2	oui	-

2.4 Élaboration du programme « Retour en position initiale »

Question 8 Compléter sur la figure R2 du document-réponses l’algorithme de programmation du retour en position initiale du chariot.







### 3.1.2 Modèle de connaissance de la partie mécanique du manipulateur

#### - Objectif

L'objectif de cette partie est de justifier le modèle proposé.

**Question 11** Justifier l'expression de la fonction de transfert du bloc B1 et celle du bloc B3 du schéma-blocs (figure 10). Préciser le(s) solide(s) isolé(s), les actions mécaniques prises en compte, les hypothèses effectuées, le théorème utilisé.

Appliquons le théorème du moment dynamique à l'ensemble poulie motrice  $PM$  et rotor moteur  $RM$  dans le repère galiléen lié au bâti 0, exprimé au point  $D$  et en projection sur  $\vec{z}$  :

$$\vec{\delta}(D, \{RM, PM\}/0) = \overline{\vec{M}(D, \{RM, PM\} \rightarrow \{RM, PM\})}$$

puisque l'inertie de la poulie PR et les masses des tronçons de la courroie sont négligées.

$$\begin{aligned} J_r \cdot \frac{d\omega_m}{dt} &= \overline{\vec{M}(D, \text{stator} \rightarrow RM)} \cdot \vec{z} + \overline{\vec{M}(D, \text{courroie} \rightarrow PM)} \cdot \vec{z} \\ &= c_m - f_1 \cdot \omega_m + \left( \overline{\vec{M}(P, \text{courroie} \rightarrow PM)} + \overline{D\vec{P} \wedge \vec{F}(\text{courroie} \rightarrow PM)} \right) \cdot \vec{z} \\ &= c_m - f_1 \cdot \omega_m + (-R_p \cdot \vec{y} \wedge (-t_c \cdot \vec{x})) \cdot \vec{z} = c_m - f_1 \cdot \omega_m - R_m \cdot t_c \end{aligned}$$

En passant l'équation précédente dans le domaine de Laplace dans les conditions d'Heaviside :

$$J_r \cdot p \cdot \Omega_m(p) = C_m(p) - f_1 \cdot \Omega_m(p) - R_m \cdot T_c(p) \quad \Rightarrow \quad \Omega_m(p) = \underbrace{\frac{1}{f_1 + J_r \cdot p}}_{B1} \cdot \left( C_m(p) - \underbrace{R_m \cdot T_c(p)}_{B3} \right)$$

**Question 12** Justifier l'expression de la fonction de transfert du bloc B4 du schéma-blocs de la figure 10.

Le ressort équivalent est compris entre  $P$  où la courroie se déplace de  $x_c$  et le point  $M$  de déplacement  $x$ . Ainsi :

$$t_c = K_{eq} \cdot (x_c(t) - x(t)) \Rightarrow T_c(p) = K_{eq} \cdot (X_c(p) - X(p)) = \underbrace{\frac{K_{eq}}{p}}_{B4} \cdot (V_c(p) - V(p))$$

**Question 13** Justifier l'expression de la fonction de transfert du bloc B5 du schéma-blocs de la figure 10. Préciser le(s) solide(s) isolé(s), les actions mécaniques prises en compte, les hypothèses effectuées, le théorème utilisé.

- On isole l'ensemble  $E$
- On fait le BAME appliquées à  $E$ 
  - ◊ action de la liaison glissière
  - ◊ action de la gravitation
  - ◊ action du ressort équivalent
- On applique le TRD à l'ensemble  $E$  dans le repère galiléen lié au bâti 0 et projeté sur  $\vec{x}$  :

$$M_t \cdot \frac{dv_x}{dt} = t_c(p) - f_2 \cdot v_x \Rightarrow M_t \cdot p \cdot V_x(p) = T_c(p) - f_2 \cdot V_x(p) \Rightarrow V_x(p) = \underbrace{\frac{1}{f_2 + M_t \cdot p}}_{B5} \cdot T_c(p)$$

**Question 14** Déterminer analytiquement l'expression de la fonction de transfert  $H(p) = \frac{V_x(p)}{C_m(p)}$ . Exprimer

$H(p)$  sous la forme  $\frac{R_m \cdot K_{eq}}{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3}$  et compléter le tableau du document-réponses.

On déplace le point de prélèvement de la grandeur  $T_c(p)$  vers la droite au point  $V_x(p)$ . Il faut donc multiplier le bloc de retour  $R_p$  par  $f_2 + M_t p$ .

La fonction de transfert du schéma-blocs interne est :  $\frac{V_x(p)}{V_c(p)} = \frac{K_{eq}}{p(f_2 + M_t p) + K_{eq}}$ . On obtient pour le schéma-blocs global :

$$H(p) = \frac{R_p K_{eq}}{[p \cdot (f_2 + M_t \cdot p) + K_{eq}](f_1 + J_R \cdot p) + R_p^2 \cdot K_{eq} \cdot (f_2 + M_t \cdot p)}$$

$b_0$	$R_p \cdot K_{eq}$
$a_0$	$K_{eq}(f_1 + R_p^2 \cdot f_2)$
$a_1$	$f_2 \cdot f_1 + K_{eq} \cdot (J_R + R_p^2 \cdot M_t)$
$a_2$	$J_R \cdot f_2 + M_t \cdot f_1$
$a_3$	$M_t \cdot J_R$

**Question 15** À partir de la représentation de ces pôles dans le plan complexe, justifier que la fonction de transfert  $H(p)$  peut être approchée par une fonction de transfert du premier ordre.

La fonction de transfert  $H(p)$  possède 3 pôles : un pôle réel ( $p_1 = -20$ ) et deux pôles complexes conjugués ( $p_{2,3} = -116 \pm 380i$ ). La partie réelle des deux pôles complexes conjugués est environ 6 fois plus petite que celle du pôle réel.  $p_1$  est donc le pôle dominant, on peut alors approcher la fonction de transfert  $H(p)$  par :

$$H_a(p) = \frac{K_a}{1 + \tau_a \cdot p} \text{ avec } \tau_a = -\frac{1}{p_1} = 0,05 \text{ s.}$$

**Question 16** En formulant l'hypothèse que la raideur équivalente  $K_{eq}$  est très grande, montrer que la fonction de transfert approchée  $H_a(p)$  est indépendante de  $K_{eq}$ .

Si on considère  $K_{eq}$  très grand devant les autres coefficients, on peut approcher  $H(p)$  par :

$$H_a(p) = \frac{R_p \cdot K_{eq}}{K_{eq} \cdot (f_1 + R_p^2 \cdot f_2) + K_{eq} \cdot (J_R + R_p^2 \cdot M_t) \cdot p} \Rightarrow H_a(p) = \frac{\frac{R_p}{f_1 + R_p^2 \cdot f_2}}{1 + \frac{J_R + R_p^2 \cdot M_t}{f_1 + R_p^2 \cdot f_2} \cdot p}$$

On retrouve bien un premier ordre dont les coefficients caractéristiques sont indépendants de  $K_{eq}$ .

## 3.2 Étude de la commande

### - Objectif

L'objectif de cette partie est de proposer les réglages de la structure de commande de la motorisation des axes du manipulateur.

### 3.2.3 Précision de la mise en position de l'axe

**Question 17** Déterminer le gain  $K_{pos}$  de la chaîne d'acquisition de la boucle de position en points par radian (pt/rad).

Le codeur incrémental possède 500 fentes (association d'une fente transparente et une fente opaque). La mesure de position se fait sur chaque front montant et front descendant des deux voies A et B : Il y a donc  $2 \times 2 \times 500 = 2000$  points de mesure par tour. Le gain  $K_{pos}$  est donc :

$$K_{pos} = \frac{2000}{2\pi} \approx 318 \text{ pt/rad}$$

**Question 18** Déterminer le gain  $K_a$  de l'adaptateur nécessaire à un bon réglage de l'asservissement de position.

La valeur de  $K_a$  est telle que  $\varepsilon_{\Theta}(p) = 0$ , lorsque  $X(p) = X_C(p)$  (voir figure 14 du sujet). Le gain  $K_a$  de l'adaptateur, nécessaire à un bon réglage de l'asservissement de position, est donc :

$$K_a = \frac{K_{pos}}{R_p} = \frac{2000 \times 5 \cdot 10^{-3}}{2\pi \times 5 \cdot 10^{-3}} = 64 \cdot 10^3 \text{ pt/m}$$

**Question 19** À partir uniquement de la résolution de la commande du moteur (sans prendre en compte la chaîne d'acquisition), déterminer la précision de positionnement en millimètres de la traverse par rapport au bâti. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

La précision  $\Delta x$  de positionnement en millimètres de la traverse par rapport au bâti est :

$$\Delta x = R_p \times \frac{2\pi}{2000} \approx 0,015 \text{ mm}$$

Si l'asservissement en position est précis vis-à-vis d'une consigne en échelon, la précision de positionnement de la traverse étant inférieure à 0,05 mm, l'exigence Id 1.1.1 du cahier des charges est vérifiée.

### 3.2.4 Réglage de la boucle tachymétrique

**Question 20** Déterminer l'erreur statique de vitesse  $\varepsilon_{\Omega\infty}$  pour une entrée en échelon unitaire de la boucle tachymétrique. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

La classe de la fonction de transfert en boucle ouverte est nulle. Ainsi l'erreur statique en réponse à un échelon unitaire est  $\frac{1}{1+K_{BO}}$ , ce qui donne ici :  $\varepsilon_{\Omega\infty} = \frac{1}{1+K_m K_{vit}} \neq 0$

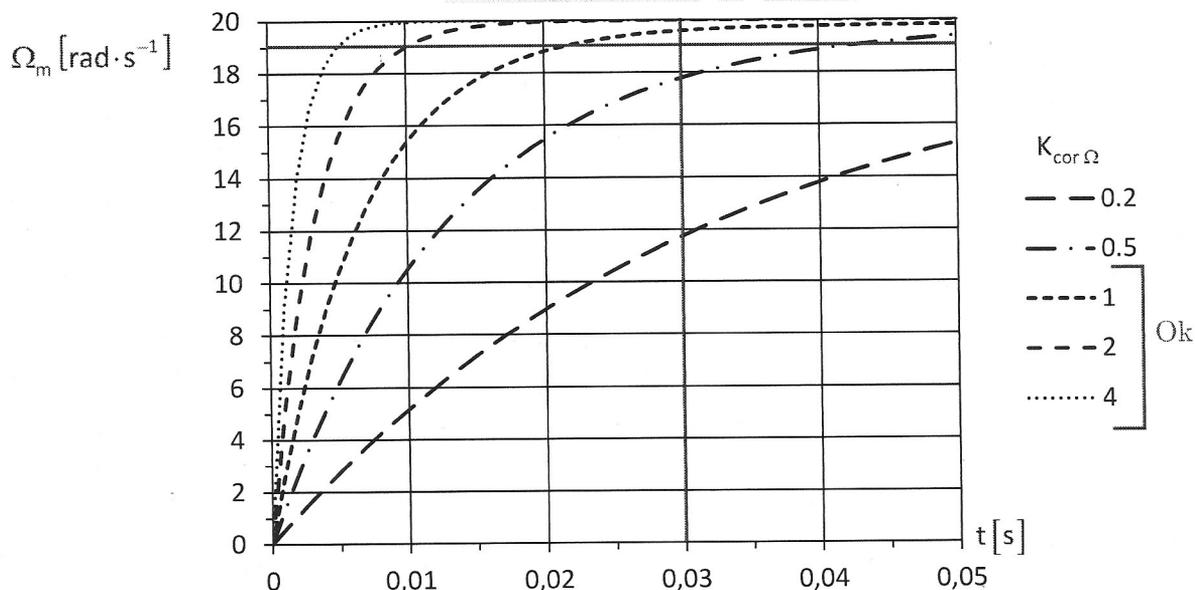
ce qui ne vérifie pas l'exigence Id 1.1.2.1 du cahier des charges : l'erreur statique de vitesse pour une entrée en échelon de la boucle tachymétrique doit être nulle.

**Question 21** Justifier l'utilisation d'un tel correcteur dans le cas présent

Le correcteur  $C_{\Omega}(p)$  permet d'obtenir une fonction de transfert en boucle ouverte corrigée de classe 1. Ainsi l'erreur statique en réponse à un échelon unitaire devient nulle ce qui valide l'exigence Id 1.1.2.1 vis-à-vis de la précision.

**Question 22** En justifiant la réponse notamment à l'aide de tracés sur la figure R4 du document-réponses, indiquer quelle(s) valeur(s) du gain  $K_{cor\Omega}$  proposée(s) sur la figure R4 permet(tent) de vérifier le cahier des charges de la boucle tachymétrique.

D'après le cahier des charges, la réponse indicielle de la boucle de vitesse doit avoir une erreur statique nulle et un temps de réponse  $t_{5\%} \leq 30$  ms. Les gains  $K_{cor\Omega} = \{4, 2, 1\}$  correspondent.



### 3.2.5 Réglage de la boucle de position

**Question 23** À partir du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{bo_\Theta}(p)$  (figure R5 du document-réponses), tracer le diagramme asymptotique de cette fonction. Proposer une expression numérique de la fonction de transfert  $H_{bo_\Theta}(p)$ .

Déterminer alors une expression numérique de la fonction de transfert en boucle fermée non corrigée de la boucle de position  $H_{bo_\Theta}(p)$ . Préciser les valeurs approchées des paramètres caractéristiques de cette fonction de transfert.

À partir de la figure R4, on remarque que :

- la valeur de la phase de la fonction de transfert varie de  $-90^\circ$  aux BF à  $-180^\circ$  aux HF ;

- la courbe de gain en dB possède une pente à  $-20$  dB/dec aux BF et à  $-40$  dB/dec aux HF.

Ceci est caractéristique d'une fonction de transfert du second ordre de classe 1 :

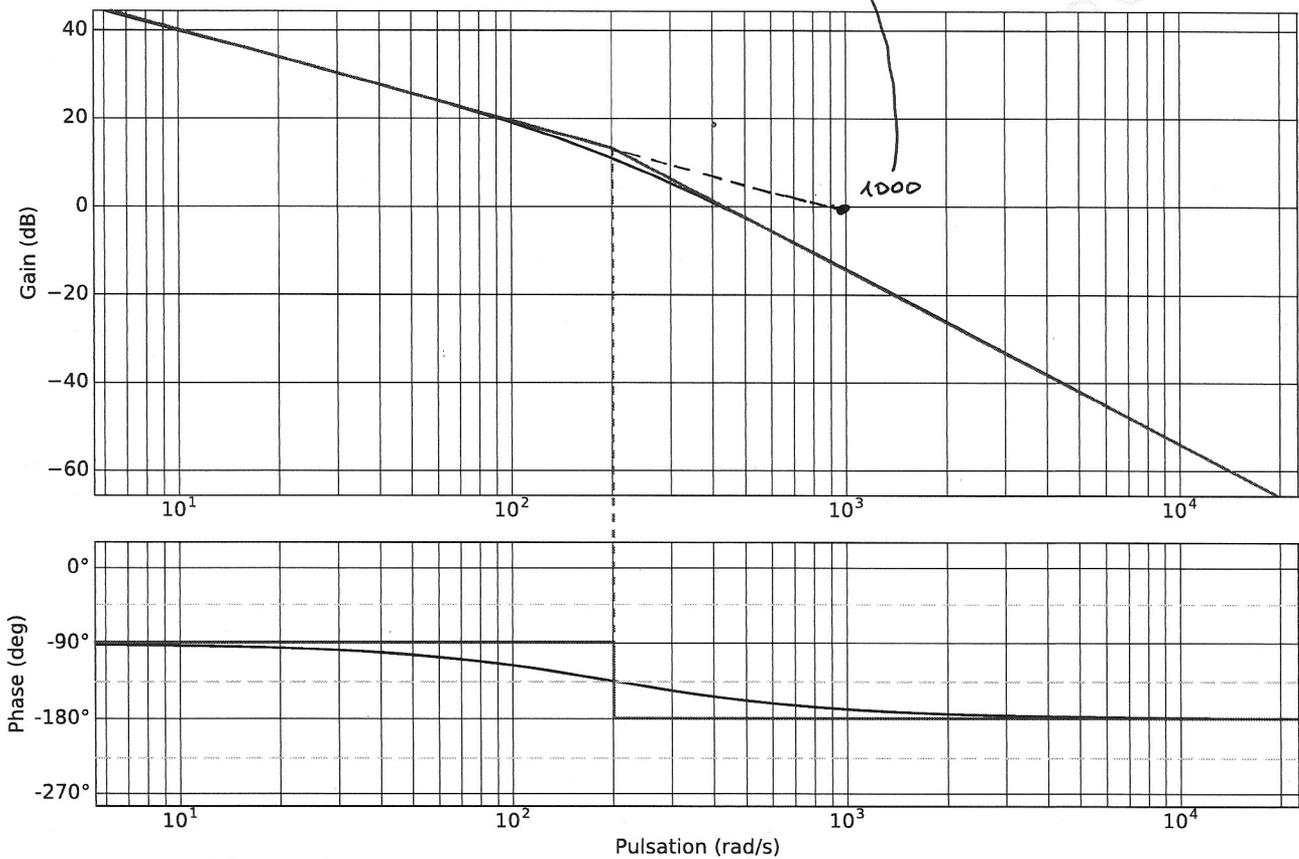
$$H_{bo_\Theta}(p) = \frac{K_{bo}}{p \cdot (1 + \tau_{bo} \cdot p)}$$

On identifie graphiquement les paramètres :

- pour  $\phi(\omega = 1/\tau_{bo}) = -135^\circ$ , on identifie  $1/\tau_{bo} = 200$  rad/s donc  $\tau_{bo} = 0,005$  s ;
- aux BF, par exemple  $\omega_1 = 10$  rad/s  $\ll 200$  rad/s, on a  $20 \log \frac{K_{bo}}{\omega_1 \sqrt{1 + \tau_{bo}^2 \cdot \omega_1^2}} \approx 20 \log \frac{K}{\omega_1} = 40$  dB  $\implies$

$K = 10 \times 10^2 \text{ s}^{-1}$  donc  $K_{bo} = 1000 \text{ s}^{-1}$

*mieux ! (méthode ci-dessus maladroite)*



La fonction de transfert en boucle fermée (non corrigée) correspondante est :

$$H_{bf_\Theta}(p) = \frac{K_{bo}}{p \cdot (1 + \tau_{bo} \cdot p) + K_{bo}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{bo}} \cdot p + \frac{\tau_{bo}}{K_{bo}} \cdot p^2} = \frac{1}{1 + 10^{-3} \cdot p + 5 \cdot 10^{-6} \cdot p^2}$$

La fonction de transfert  $H_{bf_\Theta}(p)$  est de gain unitaire.

Sa pulsation propre  $\omega_{bf} = \sqrt{\frac{K_{bo}}{\tau_{bo}}} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 10^{-6}}} \approx \frac{1}{2,2 \times 10^{-3}} \approx 450$  rad/s.

Concernant son coefficient d'amortissement :  $\frac{2 \cdot \xi_{bf}}{\omega_{bf}} = \frac{1}{K_{bo}} \implies \xi_{bf} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{K_{bo} \cdot \tau_{bo}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5}} \approx \frac{1}{4,4} \approx 0,22$

**Question 24** À partir de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{bf\_Θ}(p)$  obtenue à la question précédente, déterminer l'amplitude du dépassement lors de la réponse à un échelon unitaire de position. Conclure quant au respect de l'exigence du cahier des charges.

Le dépassement le plus grand est le premier dont l'amplitude est  $D_1 = K \cdot E_0 \cdot e^{-\frac{\xi \cdot \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ .  
Ici, ce dépassement vaut

$$D_1 = 1 \times 1 \times e^{-\frac{0,22 \times \pi}{\sqrt{1-0,22^2}}} \Rightarrow \log(D_1) = \frac{\ln(D_1)}{\ln(10)} = -\frac{0,22 \times \pi}{2,3 \times \sqrt{1-0,22^2}} \approx -0,3$$

$$\Rightarrow \log(10 \cdot D_1) = 0,7 \Rightarrow D_1 \approx 0,5 \text{ rad} \neq 0$$

NB : l'énoncé attendait une méthode graphique

cdc non respecté

**Question 25** À partir des résultats de la question 23, déterminer la fonction de transfert en boucle fermée de la boucle de position  $H_{bf\_cor}(p)$  en fonction de  $K_{corΘ}$ . Déterminer la valeur maximale du gain  $K_{corΘ}$  du correcteur assurant le respect de l'exigence de dépassement du cahier des charges.

La fonction de transfert en boucle fermée corrigée est :

$$H_{bf\_cor}(p) = \frac{K_{cor} \cdot K_{bo}}{p \cdot (1 + \tau_{bo} \cdot p) + K_{cor} \cdot K_{bo}}$$

$H_{bf\_cor}(p)$  est une fonction de transfert du second ordre standard. On identifie alors ses paramètres caractéristiques :

$$K_{bf} = 1 ; \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{cor} \cdot K_{bo}}{\tau_{bo}}} ; \xi = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{K_{cor} \cdot K_{bo} \cdot \tau_{bo}}}$$

Pour satisfaire l'exigence Id 1.1.1 de non-dépassement du cahier des charges, il faut que :

$$\xi \geq 1.$$

On en déduit donc que :

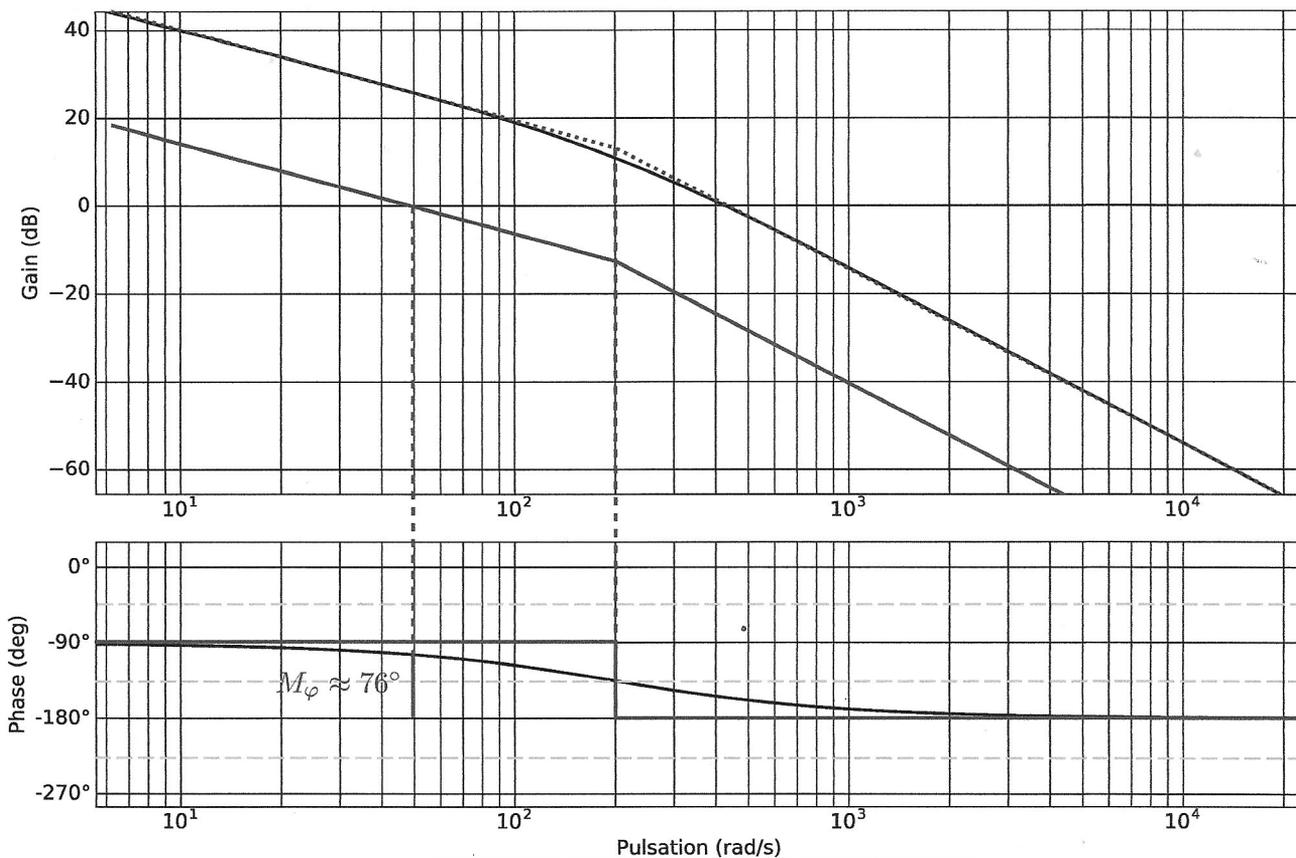
$$K_{cor}^{max} = \frac{1}{4 \cdot K_{bo} \cdot \tau_{bo}} = 0,05.$$

**Question 26** Superposer en couleur sur la figure R5 du document-réponses le diagramme asymptotique de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée  $H_{bo\_cor}(j,\omega)$ . Préciser l'allure des courbes de gain et de phase.

La fonction de transfert en boucle ouverte corrigée est :

$$H_{bo\_cor}(p) = \frac{K_{cor} \cdot K_{bo}}{p \cdot (1 + \tau_{bo} \cdot p)} = K_{cor} \cdot H_{bo\_Θ}(p),$$

avec  $K_{cor} = K_{cor}^{max} = 0,05$ . Le diagramme de Bode de  $H_{bo\_cor}(p)$  est de la même allure que le diagramme de la figure R4 du document-réponses (fonction de transfert non corrigée  $H_{bo\_Θ}(p)$ ). Il faut translater la courbe en gain de  $20 \log K_{cor} \approx -26$  dB (vers le bas) et ne pas modifier le diagramme en phase.



**Question 27** Justifier avec soin la stabilité en boucle fermée du modèle proposé. Puis, mettre en évidence et déterminer graphiquement sur la figure R5 du document-réponses la marge de gain  $M_G$  et la marge de phase  $M_\varphi$  de la boucle de position corrigée. Conclure quant au respect de l'exigence de stabilité du cahier des charges.

Pour justifier la stabilité en boucle fermée du modèle proposé, on utilise le critère du Revers (graphique) sur la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée : la marge de gain est infinie (car la phase  $-180^\circ$  n'est jamais atteinte) et la marge de phase est bien supérieure  $\geq 40^\circ$  (voir les tracés sur la figure précédente R4). Donc le système est stable en boucle fermée et vérifie l'exigence de stabilité du cahier des charges.

**Question 28** Conclure quant à la validité de la commande de la boucle de position avec un correcteur proportionnel vis-à-vis du cahier des charges.

Le gain de la fonction de transfert en boucle fermée est unitaire, donc l'erreur statique sera nulle pour la réponse indicielle en position. De plus, nous avons dimensionné le correcteur de la boucle de position de manière à vérifier sa stabilité et le non-dépassement de la réponse temporelle.

## 4 Compatibilité de l'axe Z embarqué avec le manipulateur

### 4.2 Détermination de l'action mécanique exercée par l'axe Z sur le chariot 2

**Question 29** Le solide 5 est un solide de révolution autour de l'axe  $(G_5, \vec{z})$ . Il possède donc une matrice d'inertie de la forme :

$$I(G_5, 5) = \begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & A_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{G_5, B_5}$$

**Question 30** Pour calculer le moment dynamique  $\vec{\delta}(O_2, 5/0)$ , on utilise la formule de changement de point

en passant par le centre de gravité  $G_5$  du solide 5 :

$$\vec{\delta}(O_2, 5/0) \cdot \vec{y} = \left( \vec{\delta}(G_5, 5/0) + \overrightarrow{O_2 G_5} \wedge m_5 \vec{a}(G_5, 5/0) \right) \cdot \vec{y}.$$

- $\vec{\delta}(G_5, 5/0) \cdot \vec{y} = \frac{d}{dt} \left( [I_{G_5, 5} \cdot \vec{\Omega}(5/0)] \cdot \vec{y} \right)_{\mathcal{B}_0}$  car  $G_5$  est le centre de gravité du solide 5 et  $\vec{y}$  est fixe dans la base  $\mathcal{B}_0$ .  $\vec{\Omega}(5/0) = \omega_z \vec{z}$  donc :

$$\vec{\delta}(G_5, 5/0) \cdot \vec{y} = 0;$$

- $\vec{a}(G_5, 5/0) = \frac{dv_x}{dt} \vec{x} + \frac{dv_z}{dt} \vec{z}$  donc :

$$\left( \overrightarrow{O_2 G_5} \wedge m_5 \vec{a}(G_5, 5/0) \right) \cdot \vec{y} = \left[ (x_5 \vec{x} + z_5 \vec{z}) \wedge m_5 \left( \frac{dv_x}{dt} \vec{x} + \frac{dv_z}{dt} \vec{z} \right) \right] \cdot \vec{y} = m_5 \left( z_5 \frac{dv_x}{dt} - x_5 \frac{dv_z}{dt} \right).$$

Ainsi :

$$\boxed{\vec{\delta}(O_2, 5/0) \cdot \vec{y} = m_5 \left( z_5 \frac{dv_x}{dt} - x_5 \frac{dv_z}{dt} \right)}.$$

### Question 31

On cherche l'inconnue de liaison  $M_{32} = -M_{23}$  dans la liaison encastrement entre les solides 2 et 3. Le système étudié est une chaîne ouverte de solides 0-1-2-3-4-5. Il faut isoler  $\{3,4,5\}$  et appliquer le TMD au point  $O_2$  en projection suivant  $\vec{y}$ . Le bilan des actions mécaniques extérieures est :

- la pesanteur sur 3, 4 et 5 (actions connues) ;
- l'action mécanique de liaison entre 2 et 3 (recherchée).

On obtient :

$$\left( \vec{\delta}(O_2, 3/0) + \vec{\delta}(O_2, 4/0) + \underbrace{\vec{\delta}(O_2, 5/0)}_{\text{terme déterminé}} \right) \cdot \vec{y} = M_{23} + \left( \overrightarrow{O_2 G_3} \wedge -m_3 g \vec{z} + \overrightarrow{O_2 G_4} \wedge -m_4 g \vec{z} + \overrightarrow{O_2 G_5} \wedge -m_5 g \vec{z} \right) \cdot \vec{y}$$

- Calcul des moments de l'action de pesanteur :  $(\overrightarrow{O_2 G_i} \wedge -m_i g \vec{z}) \cdot \vec{y} = m_i g x_i$  pour  $i \in \{3, 4, 5\}$  ;
- Calcul moments dynamiques  $\vec{\delta}(O_2, 3/0) + \vec{\delta}(O_2, 4/0)$  (par analogie avec  $\vec{\delta}(O_2, 5/0)$ ) :

$$\diamond \vec{\delta}(O_2, 3/0) \cdot \vec{y} = \left( \underbrace{\vec{\delta}(G_3, 3/0)}_{\vec{\delta}} + \overrightarrow{O_2 G_3} \wedge m_3 \vec{a}(G_3, 3/0) \right) \cdot \vec{y} = m_3 z_3 \frac{dv_x}{dt} ;$$

$$\diamond \vec{\delta}(O_2, 4/0) \cdot \vec{y} = \left( \underbrace{\vec{\delta}(G_4, 4/0)}_{\vec{\delta}} + \overrightarrow{O_2 G_4} \wedge m_4 \vec{a}(G_4, 4/0) \right) \cdot \vec{y} = m_4 \left( z_4 \frac{dv_x}{dt} - x_4 \frac{dv_z}{dt} \right) ;$$

Pour les calculs, on a utilisé :  $\vec{a}(G_3, 3/0) = \frac{dv_x}{dt} \vec{x}$  et  $\vec{a}(G_4, 4/0) = \frac{dv_x}{dt} \vec{x} + \frac{dv_z}{dt} \vec{z}$ .

Ainsi :

$$\boxed{M_{32} = g(x_3 m_3 + x_4 m_4 + x_5 m_5) - m_3 z_3 \frac{dv_x}{dt} - m_4 \left( z_4 \frac{dv_x}{dt} - x_4 \frac{dv_z}{dt} \right) - m_5 \left( z_5 \frac{dv_x}{dt} - x_5 \frac{dv_z}{dt} \right)}.$$

**Question 32** Graphiquement sur la figure 19 du sujet, on trouve  $|M_{32}|_{max} \approx 2 \text{ N} \cdot \text{m}$  pour le couple d'accélération  $(\dot{v}_x, \dot{v}_z) = (-10, 10) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

**Question 33** Pour calculer  $Z_{32}$ , on isole  $\{3,4,5\}$  et on applique le TRD en projection suivant  $\vec{z}$  :  $Z_{32} = (m_3 + m_4 + m_5) \cdot g + (m_4 + m_5) \frac{dv_z}{dt} < (m_3 + m_4 + m_5) \left( g + \frac{dv_z}{dt} \right) = 20 \text{ N}$ .

Pour calculer la valeur du facteur de charge, on utilise les valeurs numériques suivantes :

$$|M_{32}| = 2 \text{ N} \cdot \text{m} ; |Z_{32}| = 20 \text{ N} ; N_{32} = L_{32} = 0 ; Z_{32 \text{ max}} = 100 \text{ N} ; M_{32 \text{ max}} = 67 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

On obtient :

$$f_v = \frac{20}{100} + \frac{2}{67} \approx 0,23 < 1.$$

Les valeurs des efforts de liaison dans les guidages sont bien inférieures aux valeurs maximales des efforts que peut subir le chariot sous chargements extérieurs :  $|M_{32}| < M_{32 \text{ max}} ; |L_{32}| < L_{32 \text{ max}}$  et  $f_v < 1$ .

FIN du corrigé

explications plus claires?

$$m_3 \times 0 + m_4 \dot{v}_3 + m_5 \dot{v}_3 = -(m_3 + m_4 + m_5) g + Z_{23}$$

↑  
pas de composante sur  $z$   
pour le vitone (et donc  
l'accélération) de  $G_3$

$$\rightarrow Z_{23} = \underbrace{(m_3 + m_4 + m_5) g}_{m_E = 1 \text{ kg}} + \underbrace{(m_4 + m_5) \dot{v}_3}_{\text{inconnu mais}} \text{ majoré par } m_E$$

(pb de l'énoncé?)

$$\text{donc } Z_{23} < m_E (g + \dot{v}_3) = 20 \text{ N}$$