Sciences Industrielles de l'Ingénieur

DS n°4 / Concours blanc

La durée de ce devoir est de 3h. Il est l'épreuve de SII du concours blanc.

Il s'agit d'un extrait du sujet du concours Centrale-Supélec PSI 2005, relatif au véhicule Segway. Les questions sélectionnées abordent divers aspects mécaniques, essentiellement afin de caractériser son comportement dynamique, notamment lors d'un virage ou du freinage.

L'essentiel des réponses est à apporter sur copie libre. Seules deux questions nécessitent des relevés et tracés sur le document réponse fourni.

S'agissant d'un extrait certaines questions peuvent manquer, ne pas s'étonner donc si certains numéros vous semblent manquants.

Aucun document n'est autorisé.

Toute calculatrice autonome est autorisée.

Il sera tenu compte de la qualité de la présentation dans la notation.

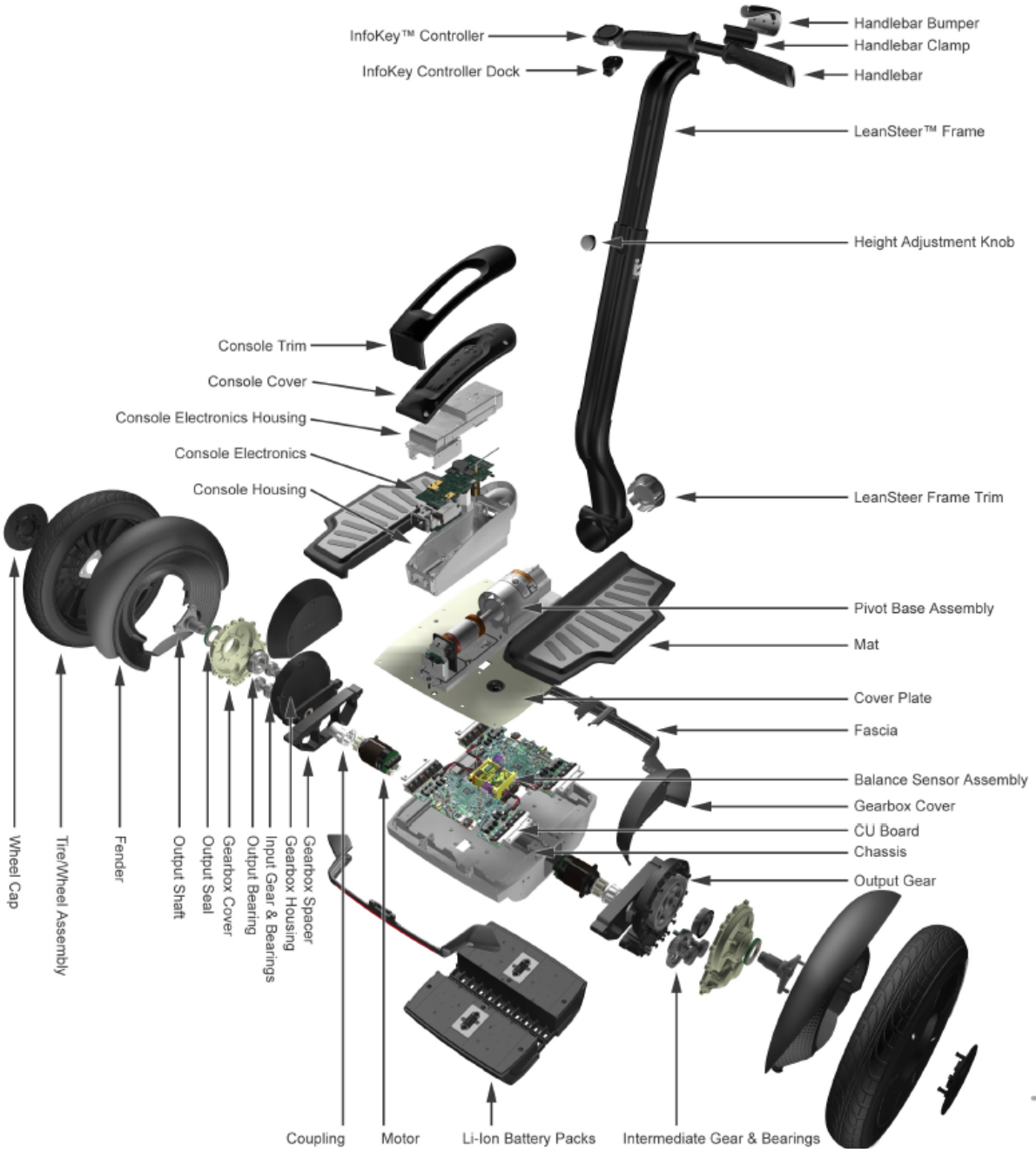
Bon courage.

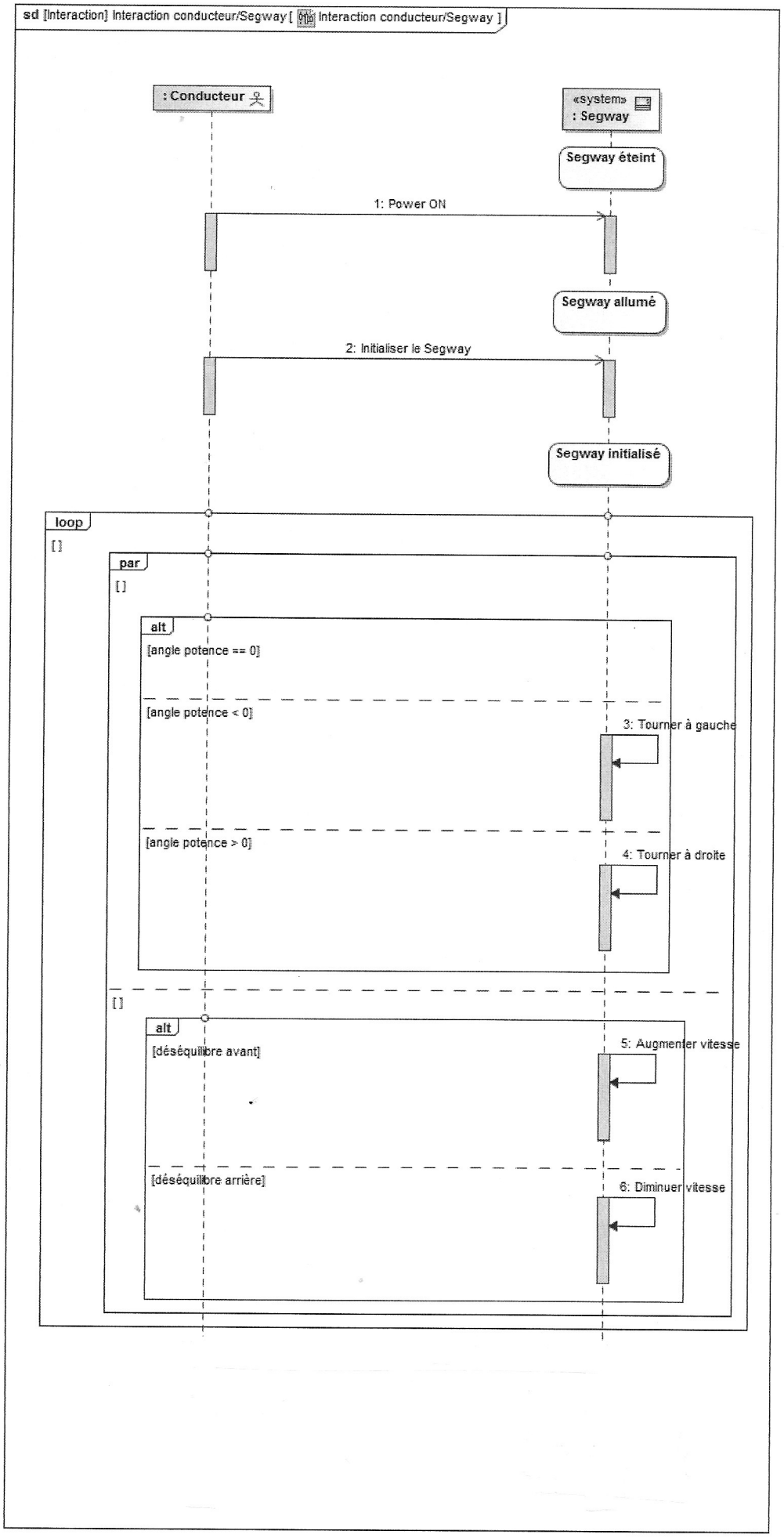
VÉHICULE AUTO-BALANCÉ SEGWAY

L'éclaté ci-dessous présente l'organisation matérielle de ce véhicule original.

Le diagramme SysML de séquence fourni page suivante apporte des informations sur son mode d'emploi.

Les pages fournies ensuite sont extraites du sujet d'origine.

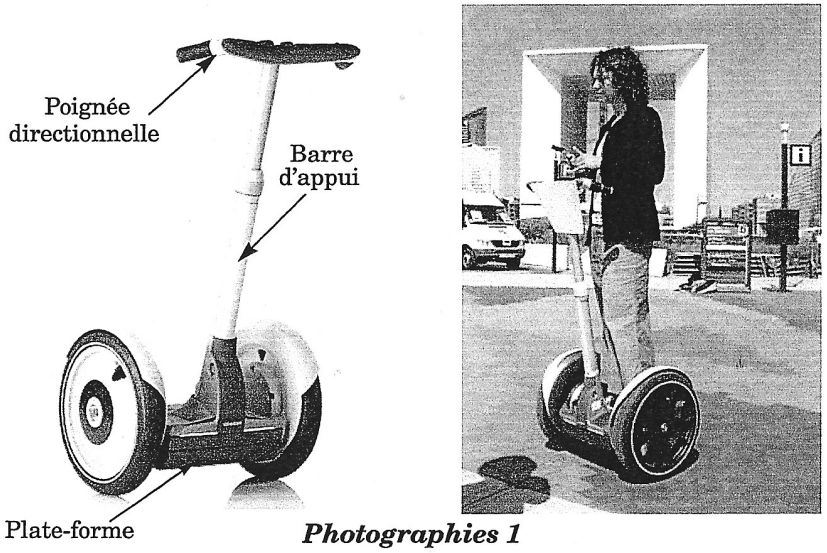



sd [Interaction] Interaction conducteur/Segway [Interaction conducteur/Segway]
: Conducteur
«system»
: Segway
Segway éteint
1: Power ON
Segway allumé
2: Initialiser le Segway
Segway initialisé
loop
[ ]
par
[ ]
alt
[angle potence == 0]
[angle potence < 0]
3: Tourner à gauche
[angle potence > 0]
4: Tourner à droite
[ ]
alt
[déséquilibre avant]
5: Augmenter vitesse
[déséquilibre arrière]
6: Diminuer vitesse

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UN VEHICULE AUTO-BALANCÉ DE TYPE SEGWAY®

Partie I - Analyse système



Photographies 1

Le support de l'étude est le véhicule auto-balancé Segway® . Il s'agit d'un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. En termes de prestations, il est moins rapide qu'une voiture ou qu'un scooter, plus maniable, plus écologique, moins encombrant et nettement plus moderne.

La conduite du Segway® se fait par inclinaison du corps vers l'avant ou vers l'arrière, afin d'accélérer ou freiner le mouvement (comme pour la marche à pied dans laquelle le piéton s'incline vers l'avant pour débuter le mouvement). Les virages à droite et à gauche sont quant à eux commandés par la rotation de la poignée directionnelle située sur la droite du guidon (voir photographies 1).

La spécificité de ce véhicule est d'avoir deux roues qui ont le même axe de rotation, avec son centre de gravité situé au-dessus de l'axe commun des roues, si bien qu'on se demande comment rester à l'équilibre une fois monté sur la plate-forme. Tout comme le cerveau permet à l'individu de tenir debout sans tomber grâce à l'oreille interne, le système comporte un dispositif d'asservissement d'inclinaison, maintenant la plate-forme du véhicule à l'horizontale ou encore la barre d'appui, supposée orthogonale à cette plate-forme, à la verticale.

Le Segway® comporte à cet effet des capteurs et des microprocesseurs commandant les deux moteurs électriques équipant les deux roues.

L'objectif de cette étude est de vérifier le non-dérapage des roues en virage, les performances de vitesse et d'accélération et enfin la stabilité en ligne droite.

Énoncé des Fonctions de Service :

- FS1 : permettre au conducteur de se déplacer aisément sur la route.
- FS2 : donner au conducteur une sensation de stabilité.
- FS3 : rester insensible aux perturbations provenant de la route.
- FS4 : rester manœuvrable dans la circulation.
- FS5 : être peu encombrant.
- FS6 : contribuer au respect de l'environnement.

La caractérisation de chacune des fonctions de service sera donnée au début de chaque partie.

On propose de s'appuyer sur une description structurelle du véhicule, composé (voir figure 2) :

- d'un **chariot** (châssis + 2 roues uniquement), transportant le conducteur,
- de deux **moto-réducteurs** entraînant les roues (un par roue),
- d'un ensemble constitué d'un **gyromètre** et d'un **pendule** délivrant une information sur l'angle d'inclinaison du châssis par rapport à la verticale et sur sa dérivée,
- d'un **calculateur** élaborant, à partir des informations issues des capteurs, les consignes de **commande** des groupes moto-réducteurs.
- de **batteries** fournissant l'énergie aux divers composants.

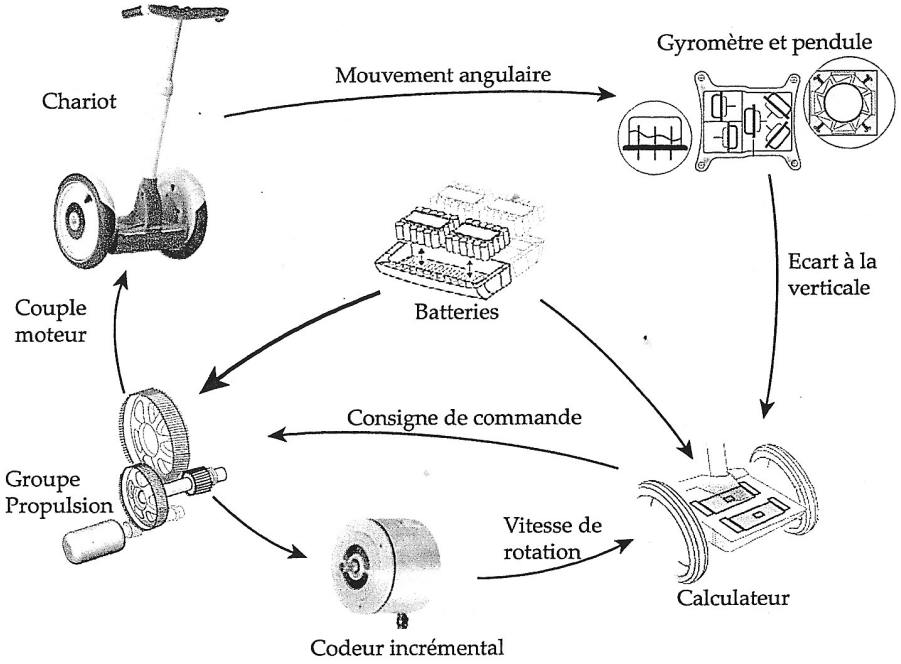


Figure 2 : schéma d'organisation structurelle

I.A - Questions préliminaires

L'énergie maximale stockée dans les batteries vaut $E_b = 2\ \text{MJ}$. Les moto-réducteurs ont un rendement global de $0,8$. La résistance moyenne à l'avancement du véhicule peut être assimilée à un effort de $60\ \text{N}$.

I.A.1) Déterminer la distance maximale que peut parcourir le Segway® entre deux recharges des batteries. Justifier la pertinence de ce moyen de transport.

Partie II - Modèle de comportement mécanique

Objectif : Proposer des relations cinématiques entre les paramètres du mouvement.

II.A - Modèle et paramétrage

- Soit $R_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ un repère supposé galiléen lié à la route tel que $\vec{z_0}$ soit dirigé suivant la verticale ascendante.
- $R_1(A, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_0})$ un repère en rotation par rapport à R_0 autour de $\vec{z_0}$ tel que $\vec{x_1}$ soit colinéaire à l'axe commun des roues et A le point milieu de l'axe des roues. On pose $\varphi = (\vec{x_0}, \vec{x_1}) = (\vec{y_0}, \vec{y_1})$ l'angle de virage.
- $R_2(A, \vec{x_1}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ un repère lié au châssis du chariot, en rotation autour de $(A, \vec{x_1})$ par rapport à R_1 tel que $\vec{z_2}$ soit colinéaire à la barre d'appui. On pose $\psi = (\vec{y_1}, \vec{y_2}) = (\vec{z_0}, \vec{z_2})$ l'angle d'inclinaison du châssis par rapport à la verticale. La régulation consiste à maintenir cet angle nul.
- $R_3(A, \vec{x_1}, \vec{y_3}, \vec{z_3})$ un repère intermédiaire en rotation par rapport à R_2, autour de $(A, \vec{x_1})$. On pose $\alpha = (\vec{y_2}, \vec{y_3}) = (\vec{z_2}, \vec{z_3})$ l'angle d'inclinaison arrière-avant du conducteur.

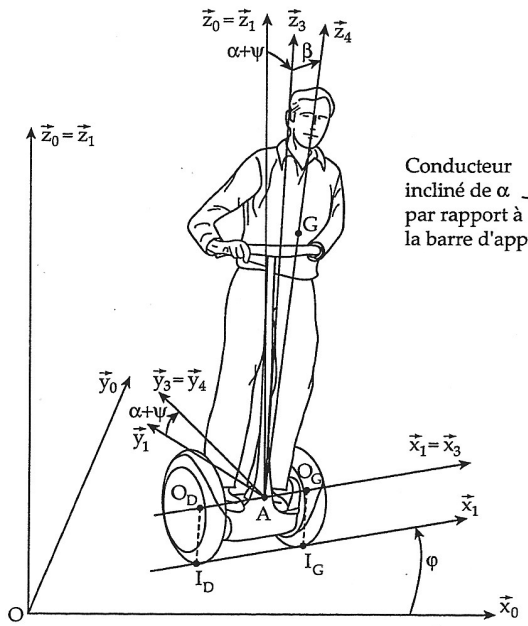


Figure 4 : paramétrage cinématique du système

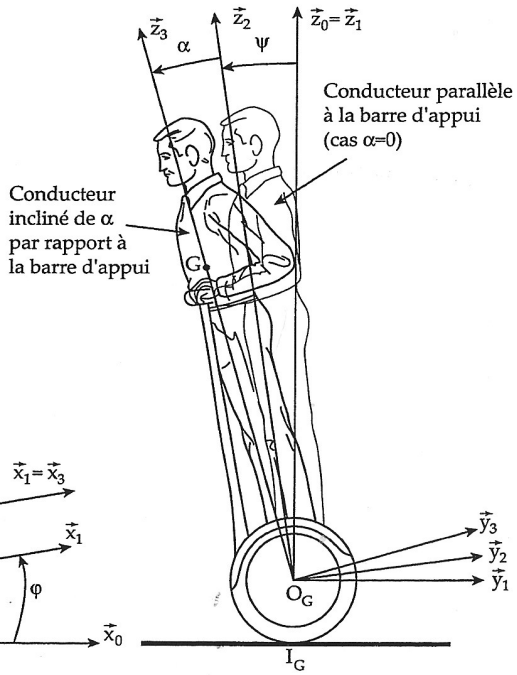


Figure 5 : figure simplifiée dans le cas $\beta = 0$ soit $\vec{z_3} = \vec{z_4}$

- $R_4(A, \vec{x_4}, \vec{y_3}, \vec{z_4})$ un repère lié au conducteur, considéré comme un solide indéformable, en rotation par rapport à R_3 autour de $(A, \vec{y_3})$ tel que l'axe $(A, \vec{z_4})$ passe par le centre de gravité G du conducteur. On pose $\beta = (\vec{x_3}, \vec{x_4}) = (\vec{z_3}, \vec{z_4})$ l'angle d'inclinaison droite-gauche du conducteur et $\overrightarrow{AG} = h\vec{z_4}$ avec h constante positive.

- $R_D(O_D, \vec{x_1}, \vec{y_D}, \vec{z_D})$ un repère lié à la roue Droite, en rotation autour de $(A, \vec{x_1})$ par rapport à R_2 où O_D est le centre de gravité de la roue droite. $\theta_D = (\vec{y_2}, \vec{y_D}) = (\vec{z_2}, \vec{z_D})$ est l'angle de rotation de la roue droite par rapport au châssis. I_D est le point de contact de la roue droite avec la route tel que $\overrightarrow{I_D O_D} = R\vec{z_0}$. On suppose que la roue droite roule sans glisser sur le sol au point I_D.
- $R_G(O_G, \vec{x_1}, \vec{y_G}, \vec{z_G})$ un repère lié à la roue Gauche, en rotation autour de $(A, \vec{x_1})$ par rapport à R_2 où O_G est le centre de gravité de la roue gauche. $\theta_G = (\vec{y_2}, \vec{y_G}) = (\vec{z_2}, \vec{z_G})$ est l'angle de rotation de la roue gauche par rapport au châssis. I_G est le point de contact de la roue gauche avec la route et on suppose que la roue gauche roule sans glisser sur le sol au point I_G (les deux roues ont même rayon R).

On note L l'empattement du chariot tel que $\overrightarrow{O_D O_G} = L\vec{x_1}$ et $\overrightarrow{O_D A} = \frac{L}{2}\vec{x_1} = \overrightarrow{AO_G}$.

II.B - Étude cinématique préalable

II.B.1) Proposer un graphe des liaisons du système restreint à l'ensemble de solides {Route, Roue Gauche, Roue Droite, Châssis}. Préciser pour chaque liaison ses caractéristiques géométriques.

II.B.3) Exprimer, en fonction du paramétrage, les torseurs cinématiques :

- du châssis par rapport au sol : $\{V(2/0)\}$, en notant $\vec{V}(A \in 2/0) = U\vec{x_1} + V\vec{y_1}$,
- de la roue droite par rapport au châssis : $\{V(R_D/2)\}$,
- de la roue gauche par rapport au châssis : $\{V(R_G/2)\}$

II.B.4) Énoncer ensuite les deux relations de roulement sans glissement des roues par rapport à la route et déterminer trois relations scalaires liant les 6 paramètres inconnus $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}_D$, $\dot{\theta}_G$, U et V aux dimensions L et R.

Ces relations seront utilisées dans l'étude dynamique.

Partie III - Validation de la FS4

Objectif : vérifier le non dérapage des roues et le non basculement du Segway® pour les différents rayons de virage.

Le **dérapage** se définit comme le **glissement** suivant $\vec{x_1}$ ou $\vec{y_1}$ des roues par rapport à la route et le **basculement** du Segway® a lieu lorsque l'une des roues n'est plus en contact avec la route. Le tableau 1 est extrait du cahier des charges. Trois configurations de vitesse du Segway® sont étudiées :

- déplacement à la vitesse d'un homme marchant,
- déplacement à la vitesse d'un homme courant,
- déplacement à la vitesse maximale.

Fonction de service	**Critère**	**Niveau**	
FS4 : rester manœuvrable dans la circulation	Dérapage	Aucun	
	Basculement	Aucun	
	Rayon de virage minimum admissible	**Vitesse**	**Rayon minimum**
		5 km/h	$\rho = 0,5$ m
		10 km/h	$\rho = 2,5$ m
		20 km/h	$\rho = 10$ m

Tableau 1 : extrait du CdCF relatif à FS4

III.A - Analyse du modèle de calcul des actions mécaniques

Le système étudié est celui de la question II.B.1, constitué des solides {Route, Roue Gauche, Roue Droite, Châssis}. Seuls les paramètres V, φ et Ψ sont considérés, les autres paramètres étant fixes ou n'intervenant pas. Les contacts roue/route en I_G et I_D sont modélisés par des liaisons sphère plan avec frottement. Cette modélisation conduit aux torseurs d'actions mécaniques exercées par la route sur les roues suivants :

$$\{T_{(\text{Route} \to R_G)}\} = {}_{I_G}\left\{\begin{matrix} X_G\vec{x_1} + Y_G\vec{y_1} + Z_G\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\} \quad \{T_{(\text{Route} \to R_D)}\} = {}_{I_D}\left\{\begin{matrix} X_D\vec{x_1} + Y_D\vec{y_1} + Z_D\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

Dans la suite de cette partie, l'asservissement d'inclinaison est considéré comme parfaitement réalisé, c'est à dire que $\Psi = 0$. De plus, le conducteur est supposé uniquement incliné d'un angle β constant vers l'intérieur du virage. On impose de plus $\alpha \equiv 0$, ce qui impose aussi V constant où V est négatif en marche avant. Enfin, le virage est pris à vitesse de rotation $\dot{\varphi}$ constante et $\dot{\varphi} > 0$.

III.B - Détermination de l'inclinaison du conducteur en virage

La position naturelle d'un individu en virage (cas de la bicyclette, des rollers, ...) est de s'incliner vers l'intérieur du virage. L'application du Principe Fondamental de la Dynamique au conducteur montre alors que cette condition est équivalente à $\vec{g} - \vec{\Gamma}(G \in 4/0)$ colinéaire à $\vec{z}_4$.

Après calcul de $\vec{\Gamma}(G \in 4/0)$, la figure du document réponse donne les trois projections de $\vec{g} - \vec{\Gamma}(G \in 4/0)$ dans la base $(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ en fonction de l'inclinaison β du conducteur, avec les paramètres :

$\dot{\varphi} = 0,8 \text{ rad/s}$, $h = 0,95 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $V = -10 \text{ km/h}$ (soit $\rho = 3,5 \text{ m}$)

III.B.1) Par un tracé sur le document réponse, justifié sur la copie, donner alors la valeur de β qui permet de vérifier la condition exposée ci-dessus.

III.C - Étude dynamique simplifiée du Segway® en virage

Dans ce paragraphe, un modèle simplifié où le conducteur est assimilé à une masse concentrée m_H en G et le chariot assimilé à une masse concentrée m_S en A est adopté. De plus, l'inertie des roues et l'inertie en rotation du Segway® sont négligées devant les termes liés à la masse du conducteur et du chariot. Les hypothèses $V = \text{constante}$, $\beta = \text{constante}$, $\dot{\varphi} = \text{constante}$ et $\Psi \equiv 0$ avec β tel que $\vec{g} - \vec{\Gamma}(G \in 4/0)$ soit colinéaire à $\vec{z}_4$ (comme défini en III.B) sont conservées. On isole alors le système complet {Conducteur, Châssis, Roue Droite, Roue Gauche}.

III.C.1) Faire le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures qui s'exercent sur ce système.

L'application du Principe Fondamental de la Dynamique à ce système dans son mouvement par rapport au sol permet d'obtenir, après réduction au point A, les équations suivantes projetées sur la base : $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$:

Théorème de la résultante dynamique selon $\vec{x}_1$:

$$-m_H\dot{\varphi}(V + h\dot{\varphi}\sin\beta) - m_S V\dot{\varphi} = X_G + X_D$$

Théorème de la résultante dynamique selon $\vec{z}_0$:

$$0 = Z_G + Z_D - (m_H + m_S)g$$

Théorème du moment dynamique en A en projection selon $\vec{y}_1$:

$$\frac{L}{2}Z_G + RX_G - \frac{L}{2}Z_D + RX_D = 0$$

III.C.2) Expliquer pourquoi le système d'équations obtenu ne permet pas de déterminer toutes les inconnues d'effort et recenser celles qui ne peuvent pas être calculées sans hypothèse complémentaire.

Le modèle de frottement de Coulomb de coefficient f est choisi pour le contact roue/sol et, en raison du déchargement de la roue gauche, l'hypothèse $X_G = 0$ est adoptée.

III.C.3) Énoncer les lois de Coulomb en utilisant les notations du III.A pour une roue, dans les cas d'adhérence et de glissement.

La stabilité du Segway® impose de garantir un effort tangentiel minimal transmissible suivant $\vec{y}_1$. Par conséquent, on suppose $Y_G = Y_D = Y_{\min}$ donné.

Le cahier des charges précise les valeurs minimales des rayons de courbure du virage ρ, définis par $|V| = \rho\dot{\varphi}$, pour différentes valeurs de vitesse. Compte tenu des valeurs des paramètres de géométrie et de masse du Segway®, on trace sur la figure du document réponse, avec $Y_{\min} = 100 \text{ N}$ et $f = 0,6$, deux graphiques :

- $\dfrac{\sqrt{Y^2_{\min} + X_D^2}}{Z_D}$ en fonction de ρ, rayon de courbure du virage en mètre,
- $\dfrac{Y_{\min}}{Z_G}$ en fonction de ρ, rayon de courbure du virage en mètre.

III.C.4) En expliquant votre démarche et en complétant le document réponse, vérifier les performances attendues vis-à-vis des rayons de virage minimums tout en garantissant les critères de non basculement et de non dérapage.

Partie IV - Validation de la FS1

Objectif : Déterminer la relation entre l'inclinaison du conducteur et l'accélération du Segway® en ligne droite ainsi que les équations mécaniques nécessaires au modèle d'asservissement d'inclinaison.

Pour une utilisation confortable et sûre, le Segway® doit satisfaire les performances de vitesse et d'accélération énoncées dans le tableau 2 extrait du cahier des charges.

Fonction de service	Critère	Niveau
FS1 : permettre au conducteur de se déplacer aisément dans un milieu urbain	Vitesse	0 – 20 km/h
	Accélération et décélération en fonctionnement normal	$1,5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ minimum
	Distance d'arrêt maximale	3 m à 20 km/h
	Manipulation intuitive	Commande naturelle pour les réflexes humains

Tableau 2 : extrait du CdCF relatif à FS1

Hypothèses :

- le Segway® se déplace en ligne droite : $\varphi \equiv 0$ et $\beta = 0$. On note donc pour simplifier $\theta_D = \theta_G = \theta$,
- l'angle α d'inclinaison du conducteur est constant : $\alpha =$ constante. Dans ce cas, $\vec{V}(A \in 2/0) = V\vec{y}_1 = -R(\dot{\psi} + \dot{\theta})\vec{y}_1$.

IV.A - Détermination des équations mécaniques régissant le système

On pose pour la suite les notations suivantes :

Conducteur : H	
Centre de gravité G avec $\overrightarrow{AG} = h\vec{z}_4$ $h = 0,95$ m $m_H = 80$ kg	$I_G(H) = \begin{pmatrix} A_H & 0 & 0 \\ 0 & B_H & 0 \\ 0 & 0 & C_H \end{pmatrix}_{\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4}$ $\quad A_H = 18\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, $B_H = 20\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, $C_H = 1,2\ \mathrm{kg \cdot m^2}$

Châssis : S	
Centre de gravité A $m_s = 25$ kg	$I_A(S) = \begin{pmatrix} A_S & 0 & 0 \\ 0 & B_S & 0 \\ 0 & 0 & C_S \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2}$ $\quad A_S = 0,8\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, $B_S = 1,2\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, $C_S = 1,3\ \mathrm{kg \cdot m^2}$
Roue gauche : R_G	
Centre de gravité O_G, avec $\overrightarrow{AO_G} = \frac{L}{2}\vec{x}_1$ Rayon $R = 240$ mm $L = 650$ mm $m_R = 5$ kg	$I_{O_G}(R_G) = \begin{pmatrix} A_R & 0 & 0 \\ 0 & B_R & 0 \\ 0 & 0 & C_R \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_G, \vec{z}_G}$ $\quad A_R = 0,28\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, $B_R = 0,05\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, $C_R = 0,05\ \mathrm{kg \cdot m^2}$
Roue droite : R_D	
Centre de gravité O_D, avec $\overrightarrow{O_DA} = \frac{L}{2}\vec{x}_1$ Rayon $R = 240$ mm $L = 650$ mm $m_R = 5$ kg	$I_{O_D}(R_D) = \begin{pmatrix} A_R & 0 & 0 \\ 0 & B_R & 0 \\ 0 & 0 & C_R \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_D, \vec{z}_D}$ $\quad A_R = 0,28\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, $B_R = 0,05\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, $C_R = 0,05\ \mathrm{kg \cdot m^2}$

La masse et l'inertie de la motorisation et de son réducteur associé sont supposées négligeables. Le moto-réducteur fait partie du châssis.

- l'action mécanique exercée par la route sur les roues est modélisée par

$$\{T(\text{Route} \to R_G)\} = {}_{I_G}\begin{Bmatrix} Y_G\vec{y}_1 + Z_G\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ et } \{T(\text{Route} \to R_D)\} = {}_{I_D}\begin{Bmatrix} Y_D\vec{y}_1 + Z_D\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- l'action mécanique exercée par l'arbre de sortie du moto-réducteur sur la roue, identique pour chaque roue est modélisée par :

$$\{T(\text{Moto-réducteur} \to R_D)\} = \{T(\text{Moto-réducteur} \to R_G)\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_S\vec{x}_1 \end{Bmatrix}$$

Dans cette partie, le problème est supposé plan dans $(A, \vec{y_1}, \vec{z_0})$.

IV.A.2) Déterminer pour chaque solide (Conducteur, Châssis, Roue Gauche et Roue Droite) dans leur mouvement par rapport au repère galiléen R_0 :

- la projection sur $\vec{y_1}$ de la résultante du torseur dynamique notée, pour un solide S_i, $\vec{R}_D(S_i/0)\cdot\vec{y}_1$,
- la projection sur $\vec{x_1}$ du moment dynamique en A notée, pour un solide S_i, $\vec{\delta}_A(S_i/0)\cdot\vec{x}_1$.

On recherche les équations liant les couples moteurs aux mouvements du système, c'est-à-dire V, Ψ et leurs dérivées.

IV.A.3) En exposant la séquence d'isolement et en appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique, montrer que l'on peut obtenir le système de deux équations suivant :

$$\begin{cases}(m_H h^2 + A_H + A_S)\ddot{\Psi} - m_H h\dot{V}\cos(\alpha+\Psi) = m_H hg\sin(\alpha+\Psi) - 2C_s \\ (m_S + m_H + 2m_R)\dot{V} - m_H h\ddot{\Psi}\cos(\alpha+\Psi) + m_H h\dot{\Psi}^2\sin(\alpha+\Psi) = -2\dfrac{A_R}{R^2}\dot{V} - 2\dfrac{C_S}{R}\end{cases}$$

Préciser clairement pour chaque isolement le système considéré et l'équation scalaire choisie. La relation cinématique suivante, issue de la question II.B.4 pourra être utilisée : $V = -R(\dot{\theta}+\dot{\Psi})$.

IV.A.4) Énoncer les hypothèses qui permettent d'envisager de linéariser le système précédent. Sous ces hypothèses, montrer alors que le système linéarisé peut se mettre sous la forme :

$$\left|\begin{array}{l} A\ddot{\Psi}(t) - B\dot{V}(t) = -2C_S(t) + C(\alpha(t)+\Psi(t)) \\ B\ddot{\Psi}(t) - D\dot{V}(t) = \dfrac{2C_S(t)}{R}\end{array}\right.$$

où vous préciserez les expressions des constantes A, B, C et D. Réaliser les applications numériques.

IV.B - Relation entre l'inclinaison du conducteur et l'accélération du Segway®

On souhaite trouver la relation entre l'inclinaison $\alpha(t)$ du conducteur et l'accélération du Segway®. L'asservissement est ici considéré comme parfaitement réalisé, c'est à dire $\Psi \equiv 0$.

IV.B.1) Montrer que cette relation s'écrit sous la forme $\dot{V}(t) = K\alpha(t)$ où vous préciserez la valeur numérique de K.

IV.B.2) Vérifier les performances attendues du cahier des charges en vous appuyant sur les configurations proposées figure 6. On utilisera ici $K = -7\ \mathrm{m\cdot s^{-2}/rad}$ et on se souviendra que V est négatif en marche avant.

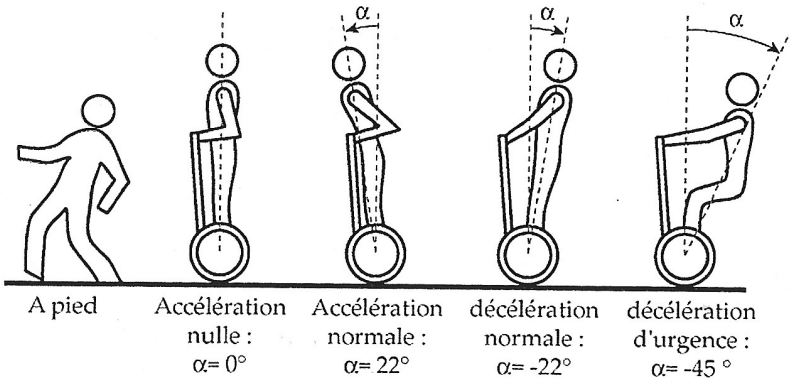


Figure 6 : configurations angulaires proposées