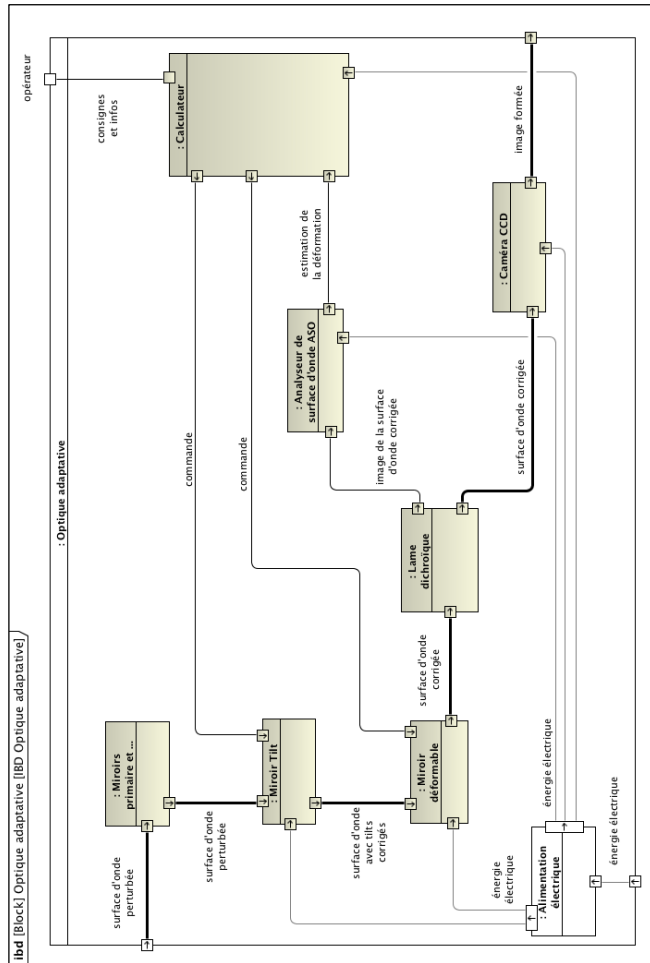
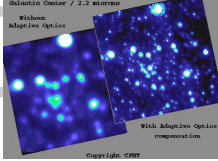




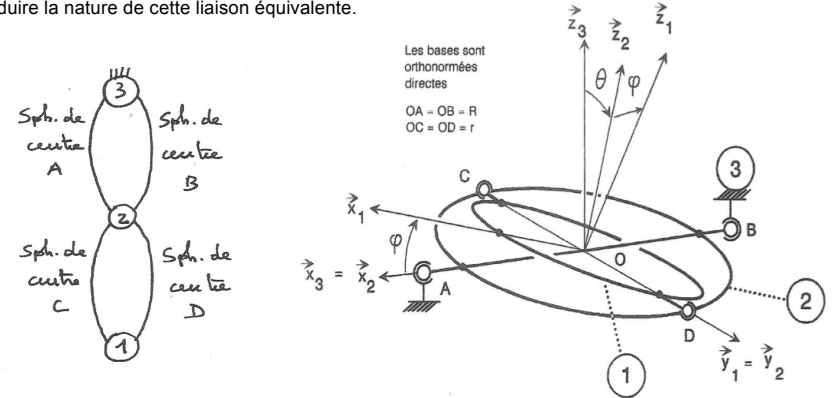
EXERCICE 1  
OPTIQUE ADAPTATIVE



Q1.: diagramme IBD

Q2 : liaison équivalente

Donner le graphe des liaisons de cet assemblage.  
Déterminer la forme générale du torseur cinématique de la liaison globale équivalente entre les solides 1 et 3.  
En déduire la nature de cette liaison équivalente.



On réduit d'abord les ensembles en parallèle, par exemple 3/2 :

$$\text{Sph. de centre A : } \mathcal{V}_{3/2} = \begin{Bmatrix} \omega'_{32x} & 0 \\ \omega'_{32y} & 0 \\ \omega'_{32z} & 0 \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}_1, \vec{y}_1}$$

$$\text{Sph. de centre B : } \mathcal{V}_{3/2} = \begin{Bmatrix} \omega''_{32x} & 0 \\ \omega''_{32y} & 0 \\ \omega''_{32z} & 0 \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \omega'_{32x} & 0 \\ \omega'_{32y} & +2R\omega''_{32z} \\ \omega'_{32z} & -2R\omega''_{32y} \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2}$$

$$\text{on : } \vec{V}(A, 3/2) = \vec{V}(B, 3/2) + \vec{\omega}_{3/2} \wedge \vec{BA}$$

$$= \vec{0} + (\omega''_{32x} \vec{x}_2 + \omega''_{32y} \vec{y}_2 + \omega''_{32z} \vec{z}_2) \wedge 2R \vec{x}_2$$

$$= -2R\omega''_{32y} \vec{z}_2 + 2R\omega''_{32z} \vec{y}_2$$

D'où  $\omega'_{32x} = \omega''_{32x}$  ainsi seul  $\omega'_{32x} = \omega''_{32x}$  peut ne pas être nul, donc :

$$\mathcal{V}_{3/2} = \begin{Bmatrix} \omega_{32} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2} \rightarrow \text{et on fait } \forall P \in (A, \vec{x}_2)$$

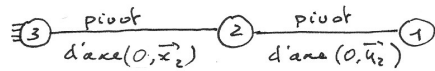
Liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_2)$ .

S'agissant d'une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_2)$  et puisque le point O est sur cet axe, on peut aussi écrire :

$$V_{3/2} = \begin{Bmatrix} \omega_{32} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O, \vec{x}_2, -\vec{z}}$$

Et donc de la même manière  $V_{2/1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O, -\vec{y}_2, -\vec{z}}$

• D'où le graphe partiellement réduit :

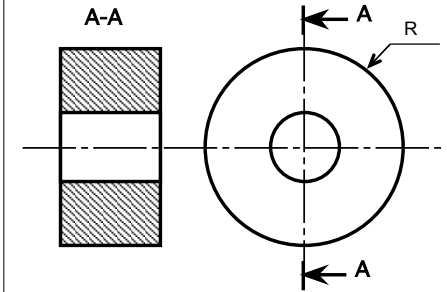
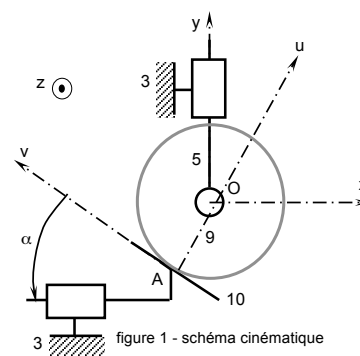


Alors dans cet assemblage en série :  $V_{3/1} = V_{3/2} + V_{2/1}$

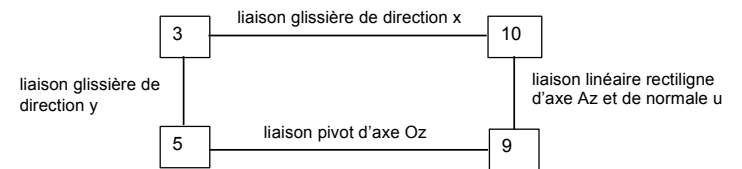
donc 
$$V_{3/1} = \begin{Bmatrix} \omega_{32} & 0 \\ \omega_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}}$$

• On reconnaît le torseur cinématique de roulement une liaison équivalente qui est une liaison sphérique à point de centre O et d'axes  $(O, \vec{x}_2)$  et  $(O, \vec{y}_2)$ .

## EXERCICE 2 POUSSOIR À GALET



On précise ci-après le graphe des liaisons :



On note R le rayon du galet, soit  $\vec{AO} = R\vec{u}$

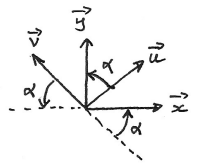
### Question 1 : bouclage cinématique

11) Pour chaque liaison, exprimer son torseur cinématique admissible par ses éléments de réduction au point A, sur la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ .

•  $V_{10/3} = \begin{Bmatrix} 0 & v_{x10/3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}_2, -\vec{z}}$   $\alpha \vec{x} = \sin\alpha \vec{u} - \cos\alpha \vec{v}$

$$V_{10/3} = \begin{Bmatrix} 0 & v_{x10/3} \sin\alpha \\ 0 & -v_{x10/3} \cos\alpha \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}}$$

$$V_{3/10} = \begin{Bmatrix} \omega_{u3/10} & 0 \\ 0 & v_{v3/10} \\ \omega_{z3/10} & v_{z3/10} \end{Bmatrix}_{A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}}$$



$$\vec{V}_{3/5} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{3/5} & 0 \end{Bmatrix}_{O, -\vec{z}}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \vec{V}(A, 3/5) &= \vec{V}(O, 3/5) + \vec{\Omega}_{3/5} \wedge \vec{OA} \\ &= \vec{0} + \omega_{3/5} \vec{z} \wedge R \vec{u} \\ &= -R \omega_{3/5} \vec{V} \end{aligned}$$

$$\vec{V}_{3/5} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R \omega_{3/5} \\ \omega_{3/5} & 0 \end{Bmatrix}_{A, \vec{u}, \vec{V}, \vec{z}}$$

$$\vec{V}_{5/3} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_{y5/3} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P, -\vec{y}, -\vec{z}} \quad \text{or } \vec{y} = \cos \alpha \vec{u} + \sin \alpha \vec{V}$$

$$\vec{V}_{5/3} = \begin{Bmatrix} 0 & v_{y5/3} \cos \alpha \\ 0 & v_{y5/3} \sin \alpha \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, \vec{u}, \vec{V}, \vec{z}}$$

12) Traduire le bouclage cinématique par un système d'équations scalaires.

$$\vec{V}_{10/3} + \vec{V}_{3/5} + \vec{V}_{5/3} + \vec{V}_{3/10} = \vec{0}$$

D'où le système d'équations

$$\begin{cases} 0 + 0 + 0 + \omega_{3/10} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 - \omega_{3/5} + \omega_{3/10} = 0 \\ v_{x10/3} \sin \alpha - v_{y5/3} \cos \alpha + 0 + 0 = 0 \\ -v_{x10/3} \cos \alpha - v_{y5/3} \sin \alpha + R \omega_{3/5} + v_{y3/10} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + v_{z3/10} = 0 \end{cases}$$

13) Montrer, par l'analyse du système d'équations obtenu, que la mobilité de ce mécanisme est  $m=2$ .

Le système d'équations est de rang  $r_c = 5$ .

Le nombre d'inconnues dans les boucles cinématiques est  $I_c = 7$ .

La mobilité du mécanisme est donc  $m = I_c - r_c = 2$ .

### Question 2 : résolution du système d'équations

21) Quelle est la loi entrée-sortie du mécanisme, c'est-à-dire la loi qui lie la vitesse de 5/3 (sortie) à la vitesse de 10/3 (entrée) ?

La quatrième équation nous donne directement :

$$v_{y5/3} = v_{x10/3} \tan \alpha \quad \text{qui est la loi entrée-sortie demandée}$$

22) Pour lever l'indétermination due à  $m=2$ , on suppose que le galet 9 roule sans glisser sur la pièce 10. Quelle est alors la vitesse de rotation de 9/5 en fonction de la vitesse de 10/3 ?

$$RSG \text{ en } A \rightarrow \vec{V}(A, 9/10) \cdot \vec{V} = 0, \text{ soit } v_{y9/10} = 0$$

(et accessoirement  $v_{z9/10} = 0$   
ce qui était déjà acquis)

La cinquième équation nous montre alors que :

$$\omega_{3/5} = \frac{1}{R} (v_{x10/3} \cos \alpha + v_{y3/3} \sin \alpha)$$

soit en tenant compte de la loi entrée-sortie précédente :

$$\omega_{3/5} = \frac{1}{R} v_{x10/3} (\cos \alpha + \tan \alpha \sin \alpha)$$

$$\cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha + \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

D'où le résultat :

$$\omega_{3/5} = \frac{1}{R \cos \alpha} v_{x10/3}$$

## PROBLÈME ROBOT SPHÉRO



### II Etude préliminaire de l'exigence de maniabilité

- Q1 Si le robot est parfaitement asservi, il faut 3 consignes :

- consigne 1 : direction en face ( $0^\circ$ )
- consigne 2 : direction à droite ( $-90^\circ$ )
- consigne 3 : direction à gauche ( $+90^\circ$ )

- Q2 L'utilisateur doit en pratique réaliser 3 changements de cap ! L'exigence 2 n'est pas valide, en particulier :

- 2.1.1 → on observe des lacets lors des changements de cap
- 2.1.3 → on observe des dérives de cap
- 2.3.1 → le robot sort des limites en  $\pm 25$  cm

### III Interface utilisateur - Sphero

- Q3  $4,7$  pouces =  $11,938$  cm  $\leftrightarrow \sqrt{1334^2 + 750^2} = 1530,378$  px  
D'où la conversion  $\frac{11,938}{1530,378} = 7,8 \cdot 10^{-3}$  cm/px

la largeur de l'eau est donc  $l = 1334 \times 7,8 \cdot 10^{-3} = 10,40$  cm

et la hauteur de l'eau est  $h = 750 \times 7,8 \cdot 10^{-3} = 5,85$  cm

- Q4 cf ci-dessus  $1 \text{ px} \leftrightarrow 7,8 \cdot 10^{-3}$  cm

- Q5 Surface de contact d'un doigt  $\approx 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$

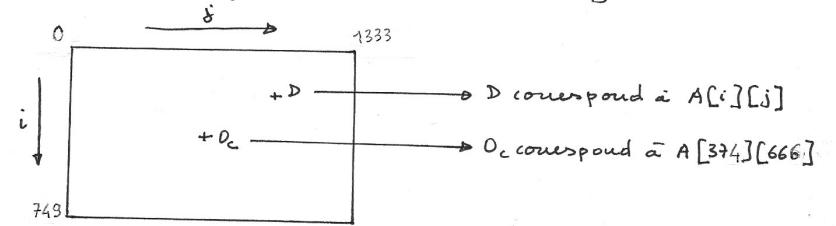
$$\text{soit } \left(\frac{1}{7,8 \cdot 10^{-3}}\right)^2 = 128,2^2 = 16436 \text{ pixels contenus dans la surface d'un doigt}$$

- Q6 Un carré de  $170$  pix de côté est un carré de :

$$170 \times 7,8 \cdot 10^{-3} = 1,32 \text{ cm de côté}$$

Le curseur peut donc couvrir la zone pointée par le doigt ( $1 \times 1$  cm de côté). Il semble que ce soit la réponse attendue à la question...

- Q7 Paramétrage de la matrice (le pt en haut à gauche est  $A[0][0]$ ) :

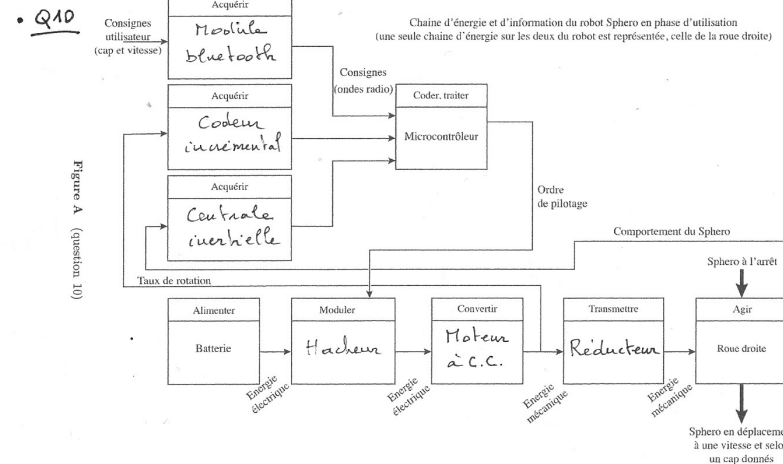


$A$  est une liste de 750 listes d'indices de 0 à 749, contenant 1334 éléments d'indices de 0 à 1333.

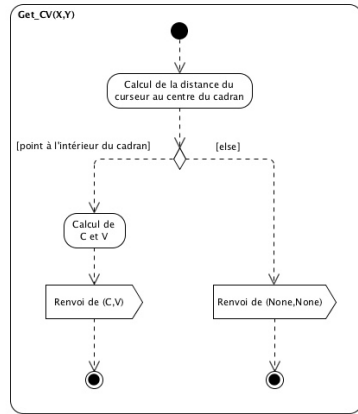
alors 
$$\begin{cases} X = j - 666 \\ Y = i - 374 \end{cases}$$

- Q8 • Q9 → voir page suivante

### IV Architecture détaillée du robot Sphero

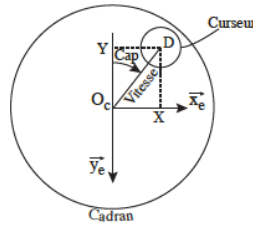


Question 8 :



```

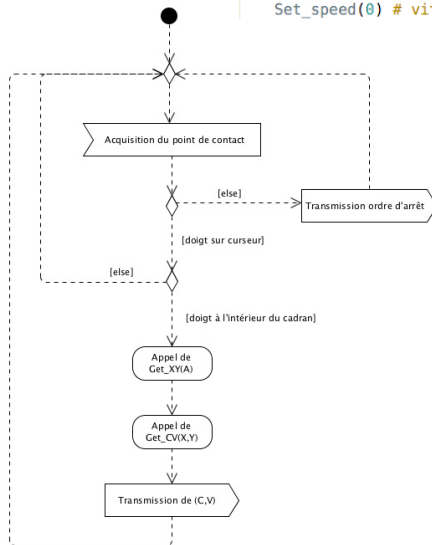
from math import *
def Get_CV(X,Y):
    distance=sqrt(X**2+Y**2)
    if distance > 305: # point hors cadran
        return (None, None)
    else:
        V=distance*100/305 # vitesse en %
        C=degrees(atan2(-Y,X)) # cap dans [0,360]
        return (C,V)
  
```



Question 9 :

```

while True: # tant que le Sphéro n'est pas éteint
    A=Get_A() # acquisition du point de contact
    if On_cursor(A): # doigt sur le curseur
        if On_dial(A): # curseur à l'intérieur du cadran
            X,Y=Get_XY(A)
            C,V=Get_CV(X,Y)
            Set_heading(C)
            Set_speed(V)
            # si le curseur est à l'extérieur du cadran on ne change rien
        else :
            Set_speed(0) # vitesse nulle, on arrête le Sphéro
  
```



V Déplacement et réglage de cap du robot Sphéro

• Q11

$$V_{6/1} = \begin{Bmatrix} P_{61} & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{61} & 0 \end{Bmatrix}_{O, B_6'} = \begin{Bmatrix} P_{61} & 0 \\ 0 & L r_{61} \\ r_{61} & 0 \end{Bmatrix}_{A, B_6'}$$

$$\begin{aligned} \text{car } \vec{V}(A, 6/1) &= \vec{V}(O, 6/1) + \vec{J}_{2/1} \wedge \vec{OA} \\ &= \vec{0} + (P_{61} \vec{x}_{6'} + r_{61} \vec{y}_{6'}) \wedge L \vec{x}_{6'} \\ &= L r_{61} \vec{y}_{6'} \end{aligned}$$

$$V_{2/6} = \begin{Bmatrix} P_{26} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, B_6'}$$

$$V_{1/2} = \begin{Bmatrix} -P_{21} & 0 \\ -q_{21} & 0 \\ -r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{I, B_6'} = \begin{Bmatrix} -P_{21} & -R q_{21} \\ -q_{21} & R P_{21} \\ -r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{A, B_6'}$$

$$\begin{aligned} \text{car } \vec{V}(A, 1/2) &= \vec{V}(I, 1/2) + \vec{J}_{1/2} \wedge \vec{IA} \\ &= \vec{0} + (-P_{21} \vec{x}_{6'} - q_{21} \vec{y}_{6'} - r_{21} \vec{z}_{6'}) \wedge R \vec{z}_{6'} \\ &= R P_{21} \vec{y}_{6'} - R q_{21} \vec{x}_{6'} \end{aligned}$$

• Q12 Par composition de mouvement il vient

$$V_{6/1} + V_{1/2} + V_{2/6} = 0$$

d'où, d'après les torseurs précédents le système d'équations:

$$\begin{cases} P_{61} + P_{26} - P_{21} = 0 & (1) \\ -q_{21} = 0 & (2) \\ r_{61} - r_{21} = 0 & (3) \\ -R q_{21} = 0 & (4) \\ L r_{61} + R P_{21} = 0 & (5) \\ 0 = 0 & (6) \end{cases}$$

L'équation (3) nous montre que

$$r_{61} = r_{21}$$

L'équation (5) nous donne  $r_{21} = k \frac{R}{ZL} (P_{36} - P_{56})$

$$\text{donc } r_{61} = k \frac{R}{ZL} (P_{36} - P_{56})$$

qui est bien de la forme attendue

$$\text{avec } k = \frac{kR}{ZL}$$

• Q13 L'équation (5) nous montre que  $P_{21} = -\frac{L}{R} r_{61}$

Soit d'après ce qui précède  $P_{21} = -\frac{L}{R} \frac{kR}{2L} (P_{36} - P_{56})$

$$\text{d'où } P_{21} = -\frac{k}{2} (P_{36} - P_{56})$$

• Q14 L'équation (1) nous montre que  $P_{61} = P_{21} - P_{26}$

$$\text{Soit } P_{61} = -\frac{k}{2} (P_{36} - P_{56})$$

De plus  $P_{26} = -k P_{36}$  (augmenage en l'ancien de rapport k)

$$\text{Donc } P_{61} = -\frac{k}{2} P_{36} + \frac{k}{2} P_{56} - k P_{36}$$

$$P_{61} = \frac{k}{2} (P_{36} + P_{56}) \text{ qui est bien de la forme attendue}$$

$$\text{avec } \mu = \frac{k}{2}$$

• Q15 Lors d'un changement de cap il ne doit pas y avoir de rouage donc  $P_{61} = 0$

• Q16 A la fin d'après Q14,  $P_{36} = -P_{56}$

→ Lors d'un changement de cap, les deux moteurs doivent tourner en sens opposé et à la même vitesse.

NB on a alors  $r_{61} = \frac{kR}{2L} (P_{36} - P_{56}) = \frac{kR}{L} P_{36}$ , taux de dév. de cap

• Q17 Lors d'une ligne droite on doit avoir  $r_{61} = 0$

• Q18 Cela impose cette fois  $P_{36} = P_{56}$

→ En ligne droite, les deux moteurs doivent tourner dans le même sens et à la même vitesse.

$$\vec{v}(0_s, 1/0) = \vec{v}(k, 1/0) + \vec{\omega}_{1/0} \wedge k \vec{D}_s$$

$\vec{D}$  car RSG

$$\text{Donc } v = \vec{v}(0_s, 1/0) \cdot \vec{y}_s = (\vec{\omega}_{1/0} \wedge k \vec{D}_s) \cdot \vec{y}_s = [(P_{10} \vec{x}_s + q_{10} \vec{y}_s + r_{10} \vec{z}_s) \wedge R_S \vec{z}_s] \cdot \vec{y}_s$$

$$\text{soit } v = -R_S P_{10}$$

• Q20 Si  $\alpha$  est constant alors  $P_{60} = 0$  par définition de  $\alpha$ .

• Q21  $P_{60} = P_{61} + P_{10}$

$$\text{en effet } \vec{\omega}_{6/0} = \vec{\omega}_{6/1} + \vec{\omega}_{1/0}$$

et  $\vec{x}_s = \vec{x}_6 = \vec{x}_6'$  car  $\beta = 0$  (pas de lacet en ligne droite)

$$\text{donc } \underbrace{\vec{\omega}_{6/0} \cdot \vec{x}_s}_{P_{60}=0} = \underbrace{\vec{\omega}_{6/1} \cdot \vec{x}_6'}_{P_{61}} + \underbrace{\vec{\omega}_{1/0} \cdot \vec{x}_s}_{P_{10}}$$

$$\text{Ainsi } P_{10} = -P_{61}$$

• Q22 D'après les relations précédentes  $v = -R_S P_{10} = R_S P_{61}$

$$\text{et } P_{61} = \frac{k}{2} (P_{36} + P_{56})$$

et en ligne droite  $P_{56} = P_{36}$

$$\text{Donc finalement } v = R_S k P_{36}$$

$$\rightarrow v_{\text{max}} = 74 \cdot 10^{-3} \times 0,21 \times 1200 \times \frac{2\pi}{60}$$

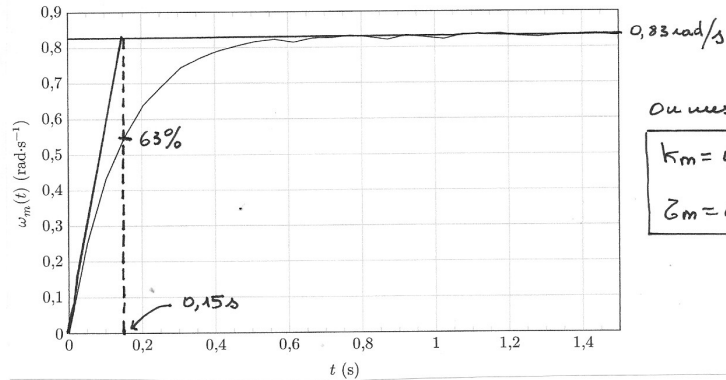
$$v_{\text{max}} = 1,35 \text{ m/s}$$

L'exigence 2.3.2 de 2m/s n'est pas tout à fait satisfaite.

Mais on peut imaginer qu'un monde a été accepté.

## VII Performances en changement de cap du Sphero

- Q29 Réponse à un échelon de 1V :

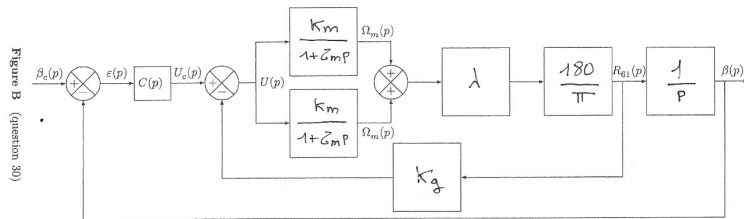


ou mesure :

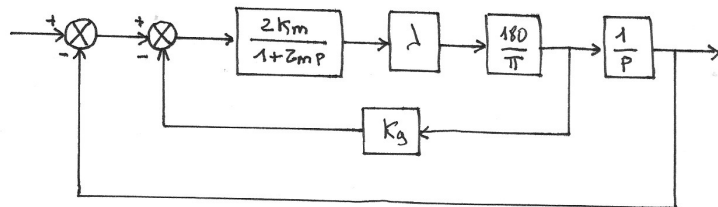
$$K_m = 0,83 \text{ rad s}^{-1} \text{ V}$$

$$\zeta_m = 0,15 \text{ s}$$

- Q30



- Q31 Puisque  $C(p) = 1$  et en superposant les deux moteurs, le schéma-bloc se simplifie en :



$$D'où H(p) = \frac{\frac{2K_m \lambda \frac{180}{\pi}}{1 + \zeta_m p} \times \frac{1}{p}}{1 + \frac{2K_m \lambda \frac{180}{\pi}}{1 + \zeta_m p} K_g} = \frac{2K_m \lambda \frac{180}{\pi}}{1 + \frac{2K_m \lambda \frac{180}{\pi}}{1 + \zeta_m p} K_g} \times \frac{1}{p}$$

$$H(p) = \frac{2K_m \lambda \frac{180}{\pi} \times \frac{1}{p}}{1 + \zeta_m p + 2K_m \lambda \frac{180}{\pi} K_g + 2K_m \lambda \frac{180}{\pi} \times \frac{1}{p}}$$

ou encore  $H(p) = \frac{1}{\frac{\pi p}{2K_m \lambda \frac{180}{\pi}} + \frac{\zeta_m \pi p^2}{2K_m \lambda \frac{180}{\pi}} + K_g p + 1}$

$$\text{soit } H(p) = \frac{1}{1 + \underbrace{\left( K_g + \frac{\pi}{360 K_m \lambda} \right) p}_{b} + \underbrace{\frac{\zeta_m \pi}{360 K_m \lambda} p^2}_{a}}$$

$$b = 0,17 \text{ s}$$

$$a = 0,013 \text{ s}^2$$

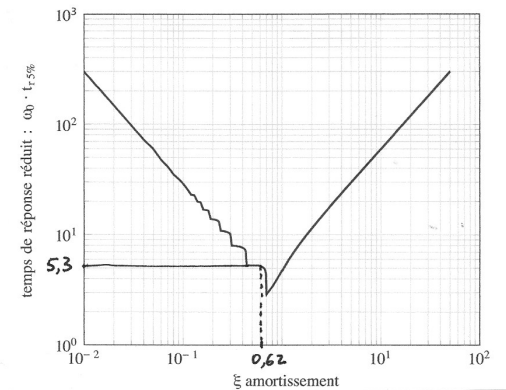
- Q32 ou identifiée  $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,013 \rightarrow \omega_0 = 7,25 \text{ rad/s}$

$$\frac{2\xi}{\omega_0} = 0,17 \rightarrow \xi = \frac{0,17}{2} \omega_0 = 0,62$$

L'abaque fournit alors  $t_{r5\%} \approx 5,3$

$$d'où t_{r5\%} \approx \frac{5,3}{7,25}$$

$$t_{r5\%} \approx 0,73 \text{ s}$$



• Q33

Performance	Exigence	Satisfait ?
Precision	Erreur statique nulle pour une entrée échelon	<u>OUI</u> car gain de $H(p) = 1$ (ou classe de FTBO = 1) c/ $1/p$ dans la boucle
Rapidité	$T_{r5\%} < 0,3s$	<u>NON</u> $T_{r5\%} \approx 0,73s > 0,3s$
Stabilité	Aucun dépassement	<u>NON</u> $\xi \approx 0,62 < 1$

• Q34

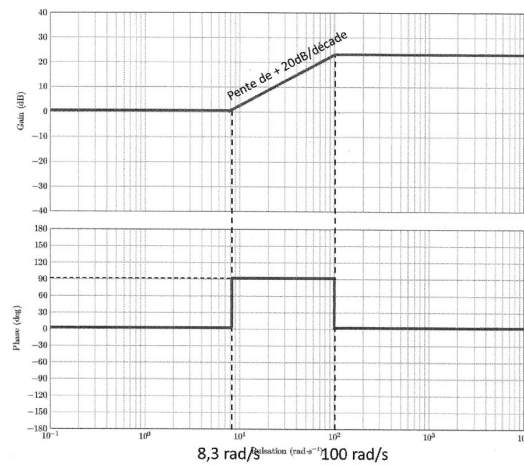
$$C(p) = K_c \frac{1+bp}{1+ap}$$

pour  $K_c = 1$  ou trace

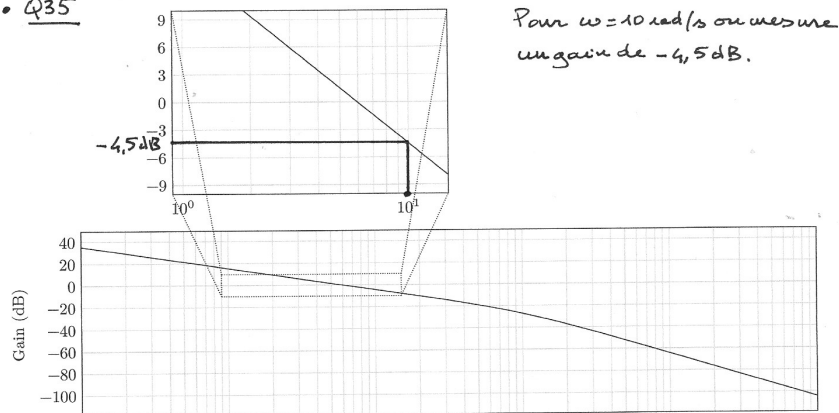
$$C(p) = \frac{1+bp}{1+ap}$$

$$\text{avec } \frac{1}{b} = \frac{1}{9,12} = 8,3 \text{ rad/s}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{0,01} = 100 \text{ rad/s}$$



• Q35



Il faut donc monter la courbe de gain de +4,5 dB.

Donc  $20 \log K_c = 4,5$  soit  $K_c = 10^{4,5/20} = 1,68$

• Q36

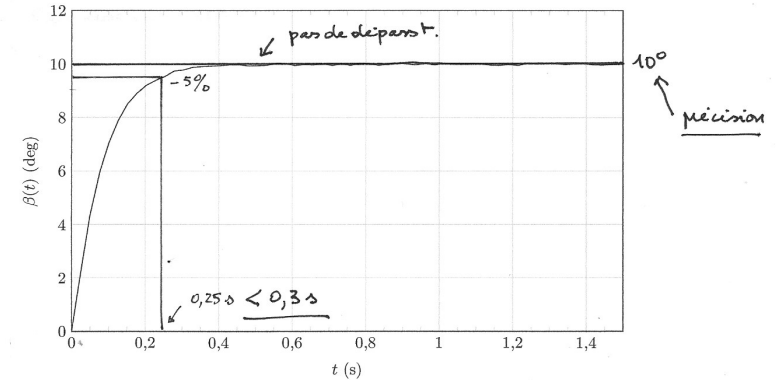


Figure 21 Réponse temporelle de la commande corrigée du Sphero pour un échelon  $\beta_c(t) = 10 \text{ deg}$

On vérifie cette fois que les performances sont satisfaites : le système est toujours précis, le temps de réponse a été réduit en dessous de 0,3s et il n'y a pas de dépassement.