



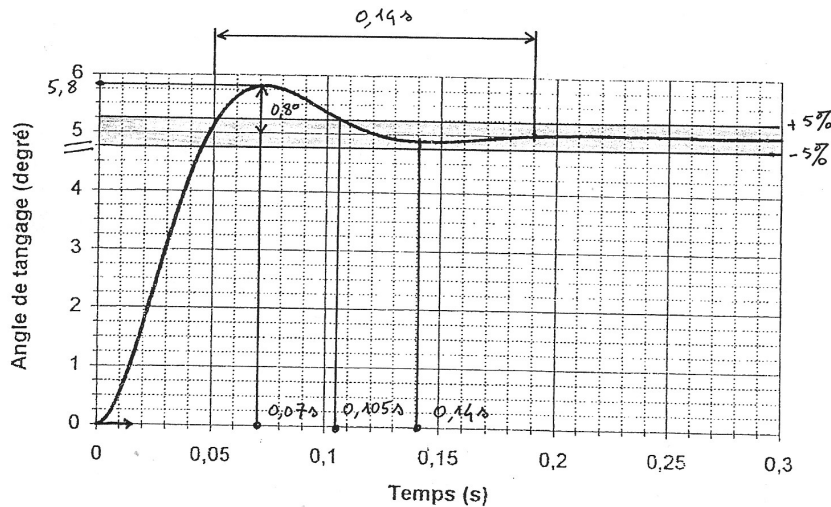
PROBLÈME 1  
CENTRIFUGEUSE HUMAINE



I. ACTIVATION DE LA NACELLE

I.1 Identification temporelle

I.1.a)



régime statique:  $E_S = 0^\circ$   
 temps de retour à 5%:  $t_{5\%} = 0,105\text{ s}$   
 dépassement:  $D_1 = 0,8^\circ$  ( $= 1^{\text{er}}$  dépassement)  $\rightarrow$  soit  $D_1\% = \frac{0,8}{5} = 16\%$   
 instant du 1<sup>er</sup> dépassement:  $t_1 = 0,07\text{ s}$   
 pseudo période:  $T = 0,14\text{ s}$

I.1.b) Un modèle du 2<sup>nd</sup> ordre se trouve justifié par:

- tangente horizontale à  $t=0$  et oscillations
- $t_1 = \frac{T}{2}$

I.1.c) on pose  $H(p) = \frac{k}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$  avec ici clairement  $k=1$  (sans dimension)

le 1<sup>er</sup> dépassement est lié à  $\zeta$  par  $D_1\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

d'où  $\ln D_1\% = -\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

$(\ln D_1\%)^2 (1-\zeta^2) = \pi^2 \zeta^2$

$\zeta^2 (\pi^2 + (\ln D_1\%)^2) = (\ln D_1\%)^2$

ou encore  $\zeta = \sqrt{\frac{(\ln D_1\%)^2}{\pi^2 + (\ln D_1\%)^2}}$  ( $>0$ )

or on a mesuré  $D_1 = 0,8^\circ$  pour une valeur asymptotique de  $5^\circ$  soit  $D_1\% = \frac{0,8}{5} = 0,16$

d'où  $\zeta = \sqrt{\frac{(\ln 0,16)^2}{\pi^2 + (\ln 0,16)^2}} = 0,5$   $\zeta = 0,5$

- de plus l'instant du 1<sup>er</sup> dépassement permet d'accéder à

$\omega_0$  selon  $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}$  d'où  $\omega_0 = \frac{\pi}{t_1 \sqrt{1-\zeta^2}}$

or on a mesuré  $t_1 = 0,07\text{ s}$  d'où  $\omega_0 = \frac{\pi}{0,07 \sqrt{1-0,5^2}}$

soit  $\omega_0 = 52 \text{ rad/s}$

## I.2 Réponse fréquentielle

I.2.a) on sait que la pulsation de résonance  $\omega_r$  est donnée

$$\text{par: } \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$\text{soit } \omega_r = 52 \sqrt{1 - 2 \times 0,5^2} \quad \boxed{\omega_r = 37 \text{ rad/s}}$$

et que l'amplification à la résonance  $G_r$  est:

$$G_r = \frac{k}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\text{soit } G_r = \frac{1}{2 \times 0,5 \sqrt{1 - 0,5^2}}$$

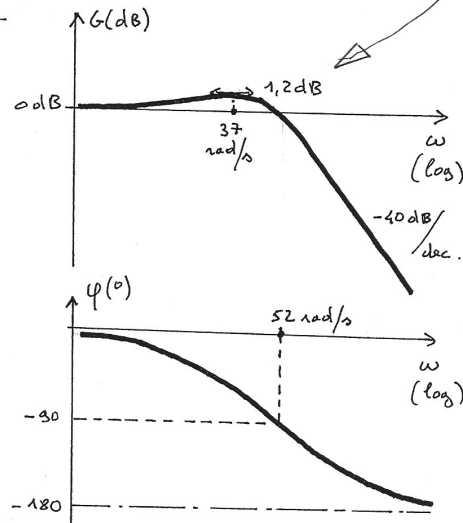
$$\boxed{G_r = 1,15}$$

soit une amplification

$$\text{de } 20 \log 1,15 = \underline{\underline{1,2 \text{ dB}}}$$

I.2.b) Diagramme de Bode

(question de cours)



## II. MISE EN ROTATION DU BRAS

### II.1 Modélisation - Fonction de transfert

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = C_m(t) - f_v \omega(t) - f_a \omega^2(t)$$

II.1.a) L'équation différentielle précédente n'est pas linéaire car la forme en  $\omega^2(t)$  ne l'est pas.

II.1.b) On pose  $\begin{cases} \delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_0 \\ \delta C_m(t) = C_m(t) - C_{m0} \end{cases}$  soit  $\begin{cases} \omega(t) = \delta\omega(t) + \omega_0 \\ C_m(t) = \delta C_m(t) + C_{m0} \end{cases}$

L'équation différentielle devient alors:

$$J \frac{d[\delta\omega(t) + \omega_0]}{dt} = [\delta C_m(t) + C_{m0}] - f_v [\delta\omega(t) + \omega_0] - f_a [\delta\omega(t) + \omega_0]^2$$

$$\text{soit } J \frac{d\delta\omega(t)}{dt} = \delta C_m(t) + C_{m0} - f_v \delta\omega(t) - f_v \omega_0 - f_a \delta\omega^2(t) - 2f_a \omega_0 \delta\omega(t) - f_a \omega_0^2$$

$$\text{ou encore } \underline{\underline{J \frac{d\delta\omega(t)}{dt} = [C_{m0} - f_v \omega_0 - f_a \omega_0^2] + \delta C_m(t) - f_v \delta\omega(t) - f_a \delta\omega^2(t) - 2f_a \omega_0 \delta\omega(t)}}$$

• Puisque  $(C_{m0}, \omega_0)$  est un point de fonctionnement ces deux valeurs sont solutions de l'équation différentielle donc:

$$\boxed{C_{m0} - f_v \omega_0 - f_a \omega_0^2 = 0}$$

• Par ailleurs, puisqu'on étudie les petites variations autour de ce pt de fonctionnement:

$$\boxed{f_a \delta\omega^2(t) \ll 2f_a \omega_0 \delta\omega(t)}$$

Ainsi, l'équation des petites variations autour du pt. de  $\omega_0$  sera:

$$J \frac{d\delta\omega(t)}{dt} = \delta C_m(t) - f_v \delta\omega(t) - 2f_a \omega_0 \delta\omega(t)$$

$$\text{ou encore } \boxed{J \frac{d\delta\omega(t)}{dt} + (f_v + 2f_a \omega_0) \delta\omega(t) = \delta C_m(t)}$$

II.1.c) Cette équation est linéaire et, transformée par la transformation de Laplace sous les conditions de Heaviside ci-dessus du point de fonctionnement devient :

$$Jp\Omega(p) + (f_v + 2f_a\omega_0)\Omega(p) = C_m(p)$$

soi  $\Omega(p)$  est la transformée de  $\delta\omega(t)$

et  $C_m(p)$  " " "  $\delta C_m(t)$

$$\text{soit encore } [(f_v + 2f_a\omega_0) + Jp]\Omega(p) = C_m(p)$$

ce qui permet d'écrire la fonction de transfert demandée :

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{C_m(p)} = \frac{1}{(f_v + 2f_a\omega_0) + Jp}$$

Soit, sous forme canonique

$$H(p) = \frac{1}{f_v + 2f_a\omega_0 + \frac{J}{f_v + 2f_a\omega_0}p}$$

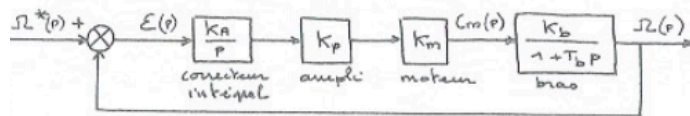
ou pose :

$$k_b = \frac{1}{f_v + 2f_a\omega_0} \quad \text{gain statique du bras}$$

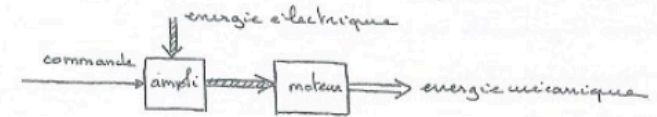
$$T_b = \frac{J}{f_v + 2f_a\omega_0} \quad \text{constante de temps du bras}$$

## II.2 Commande du bras

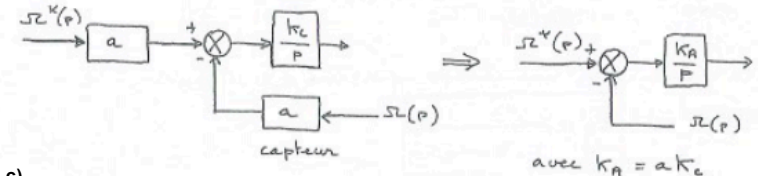
II.2.a) D'après le texte, le schéma bloc est le suivant :



II.2.b) Le pré-amplificateur est l'amplificateur de gain  $k_p$ . Il fournit la tension d'alimentation du moteur qui est l'échantillon.



(NB: Le schéma étant à retour unitaire, le gain du capteur est classiquement inclus dans  $k_A$  :



II.2.c)

$$FTBO(p) = \frac{K_A K_p K_m K_b}{p(1 + T_b p)}$$

gain  $K_{B0} = K_A K_p K_m K_b$   
 classe 1  
 ordre 2  
 const<sup>te</sup> de tps  $T_{B0} = T_b$

$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{K_A K_p K_m K_b}{p(1 + T_b p) + K_A K_p K_m K_b}$$

soit sous forme canonique :

$$FTBF(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_A K_p K_m K_b} p + \frac{T_b}{K_A K_p K_m K_b} p^2}$$

gain  $K_{BF} = 1$   
 classe 0  
 ordre 2  
 pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_A K_p K_m K_b}{T_b}}$   
 facteur d'amortissement  $\xi = \frac{1}{2\sqrt{K_A K_p K_m K_b} T_b}$

II.2.d)

Si la consigne est un échelon de vitesse  $\omega_c$ , l'écart statique est  $\boxed{\varepsilon_s = 0}$

Plusieurs arguments sont possibles:

- présence d'un intégrateur dans la boucle  $\rightarrow \varepsilon_s = 0$
- gain  $k_{BF} = 1$

Si non, on peut aussi calculer:

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\mathcal{R}^*(p)}{1 + FTBO(p)} \text{ avec } \mathcal{R}^*(p) = \frac{\omega_c}{p}$$

Si la consigne est une rampe de vitesse  $a_c$ , l'écart statique est  $\boxed{\varepsilon_v = \frac{a_c}{k_A k_P k_M k_F}}$

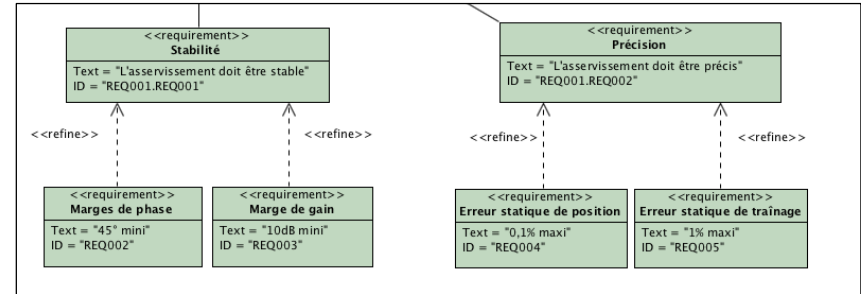
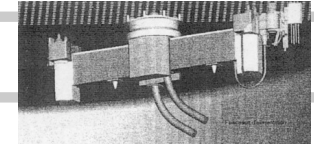
Plusieurs arguments sont possibles:

- présence d'un intégrateur dans la boucle  $\rightarrow \varepsilon_v = \frac{1}{k_{BO}} \times \text{pente}$
- gain  $k_{BF} = 1$  et, pour un 2<sup>nd</sup> ordre,  $\varepsilon_v = \frac{2B}{\omega_0} \times \text{pente}$

Si non, on peut aussi calculer:

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\mathcal{R}^*(p)}{1 + FTBO(p)} \text{ avec } \mathcal{R}^*(p) = \frac{a_c}{p^2}$$

**PROBLÈME 2**  
**Commande d'un bras de contrôle**



**Premier cas : correction proportionnelle**

Le correcteur est un gain pur réglable noté KVA : C(p) = KVA.

Q1 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement. En déduire l'erreur statique de position et l'erreur statique de traînage en fonction de KVA. En déduire la valeur minimale de KVA permettant d'assurer les performances attendues de précision.

$$\boxed{FTBO(p) = \frac{0,2 KVA}{p(1 + 0,05p)}} \text{ ou note } k_{BO} = 0,2 KVA$$

Le degré de la FTBO est  $\alpha_{BO} = 1$  donc:

- l'erreur statique de position est  $\varepsilon_s = 0$
- l'erreur statique de traînage est  $\varepsilon_v = \frac{1}{k_{BO}} = \frac{1}{0,2 KVA}$   
pour une entrée unitaire

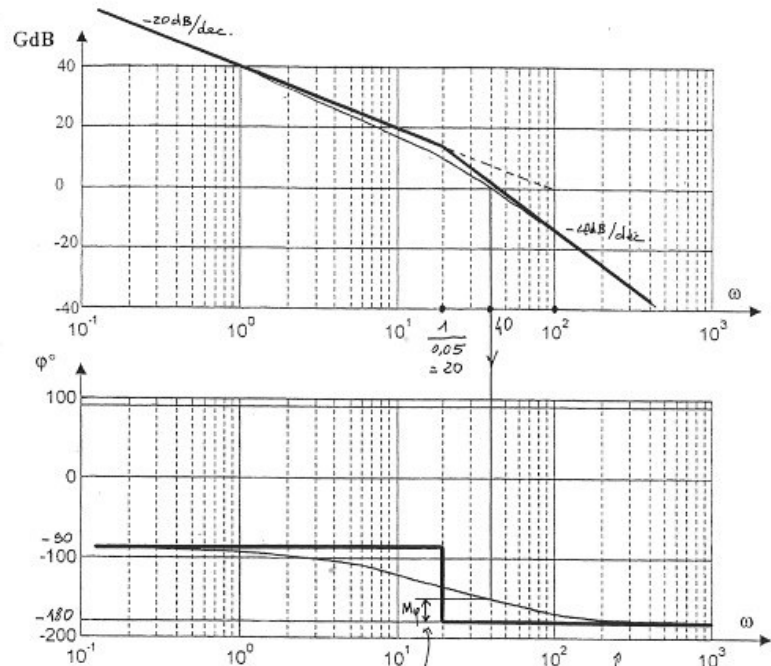
L'exigence sur l'erreur de position est donc nécessairement satisfaite.

L'exigence sur l'erreur de traînage impose:

$$\frac{1}{0,2 KVA} \leq 0,01 \text{ soit } \boxed{KVA \geq 500}$$

Q2 Sur le document réponse prévu, tracer le diagramme de Bode asymptotique et l'allure du diagramme de Bode réel de la fonction de transfert en boucle ouverte pour la valeur de KVA déterminée précédemment. Evaluer les marges de stabilité sur ce diagramme puis calculer précisément la marge de phase.

$$\text{ouverture FTBO}(p) = \frac{0,2 \times 500}{p(1+0,05p)} = \frac{100}{p(1+0,05p)}$$



Marge de phase  $\approx 30^\circ$   
 le phase de passe jamais sous  $-180^\circ$   
 d'où  $M_G = +\infty$

Pour calculer la marge de phase  $M_\phi$ , on commence par calculer

la pulsation de coupure à 0dB :

$$|FTBO(j\omega)| = 100 \times \frac{1}{\omega_1} \times \frac{1}{\sqrt{1+(0,05\omega_1)^2}} = 1 \text{ (0dB)}$$

$$\text{soit } \omega_1 \sqrt{1+(0,05\omega_1)^2} = 100 \text{ d'où on voit } \omega_1 = 42,5 \text{ rad/s}$$

Ensuite on calcule  $A_{1g}(FTBO(j\omega_1)) = -90^\circ - \arctan(0,05\omega_1)$   
 $= -90^\circ - \arctan(0,05 \times 42,5) = -154,8^\circ$

la marge de phase est donc  $M_\phi = 180 - 154,8^\circ$

$$M_\phi = 25,2^\circ$$

Q3 Une correction proportionnelle permet-elle de respecter les performances attendues ?

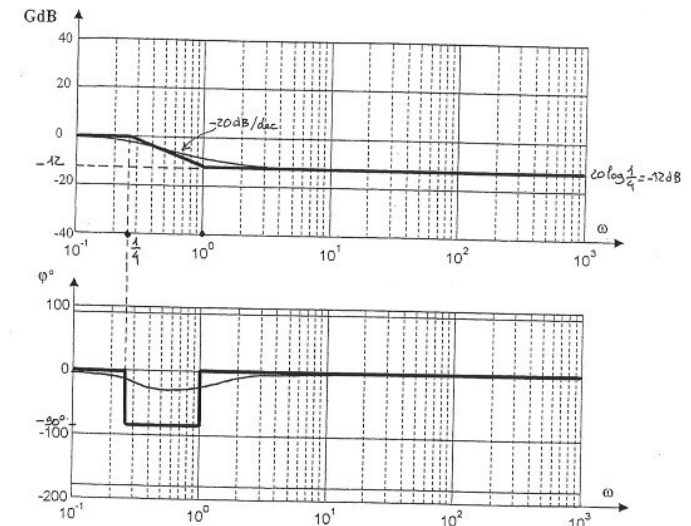
la marge de phase est très inférieure à la marge de  $45^\circ$  exigée. Pour augmenter cette marge, il faudrait diminuer KVA pour diminuer  $\omega_1$ . Mais alors on ne respecterait plus l'exigence de précision en vitesse qui exige  $KVA_{min} = 500$ .

Deuxième cas : correction par retard de phase

Le correcteur est maintenant un correcteur « à retard de phase » :  $C(p) = KVB \frac{1+p}{1+4p}$

KVB est un gain réglable.

Q4 Sur le document réponse prévu, tracer le diagramme de Bode asymptotique et l'allure du diagramme de Bode réel de la fonction  $CS(p) = \frac{1+p}{1+4p}$



**Q5** Exprimer la nouvelle erreur statique de position et la nouvelle erreur statique de traînage en fonction de KVB. En déduire la valeur minimale de KVB permettant d'assurer les performances attendues de précision.

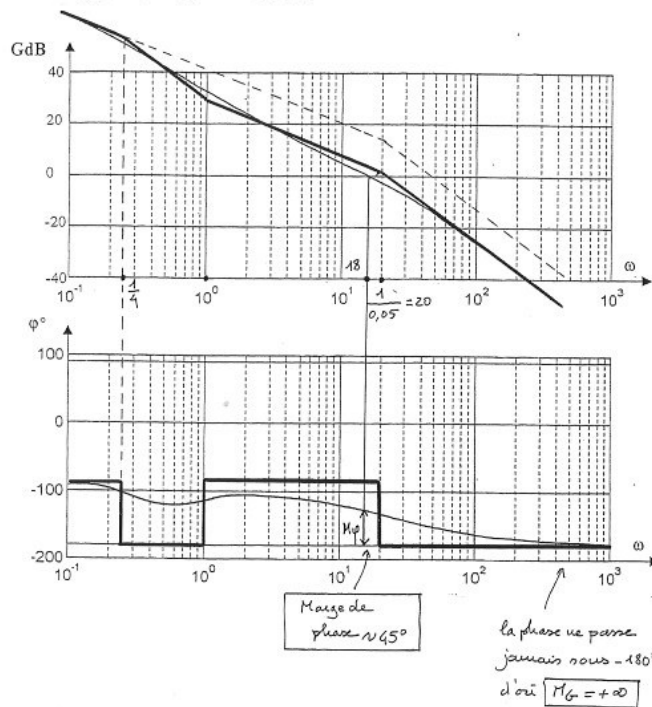
Le correcteur est de classe 0 et de gain 1. Il ne modifie donc ni la classe, ni le gain de la FTBO. Les conditions de précision sont donc inchangées.

Soit 
$$\begin{matrix} \epsilon_s = 0 \\ \epsilon_v = \frac{1}{0,2 KVB} \end{matrix}$$
 ce qui impose 
$$KVB \geq 500$$

**Q6** Sur le document réponse prévu, tracer le diagramme de Bode asymptotique et l'allure du diagramme de Bode réel de la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte. Evaluer les marges de stabilité sur ce diagramme puis calculer précisément la marge de phase.

Il faut tracer le diagramme de Bode de la FTBO avec  $KVB = 500$ ,

soit 
$$FTBO = \frac{100}{p(1+0,05p)} \times \frac{1+p}{1+4p}$$



Pour calculer la marge de phase  $M_\phi$ , on commence par chercher la pulsation de coupure à 0 dB :

$$|FTBO(j\omega_1)| = 100 \times \frac{1}{\omega_1} \times \frac{1}{\sqrt{1+(0,05\omega_1)^2}} \times \frac{\sqrt{1+\omega_1^2}}{\sqrt{1+(4\omega_1)^2}} = 1 \text{ (0dB)}$$

soit 
$$100\sqrt{1+\omega_1^2} = \omega_1 \sqrt{1+(0,05\omega_1)^2} \sqrt{1+(4\omega_1)^2}$$

d'où on sort 
$$\omega_1 = 18,4 \text{ rad/s}$$

Alors 
$$\begin{aligned} A_{18} (FTBO(j\omega_1)) &= -30 - \text{arctan } 0,05\omega_1 - \text{arctan } 4\omega_1 + \text{arctan } \omega_1 \\ &= -30 - \text{arctan } (0,05 \times 18,4) - \text{arctan } (4 \times 18,4) + \text{arctan } 18,4 \\ &= -135^\circ ! \end{aligned}$$

→ la marge de phase est donc exactement la valeur minimale attendue :  $M_\phi = 45^\circ$

**Q7** Le correcteur à avance de phase choisi permet-il de respecter les performances attendues ?

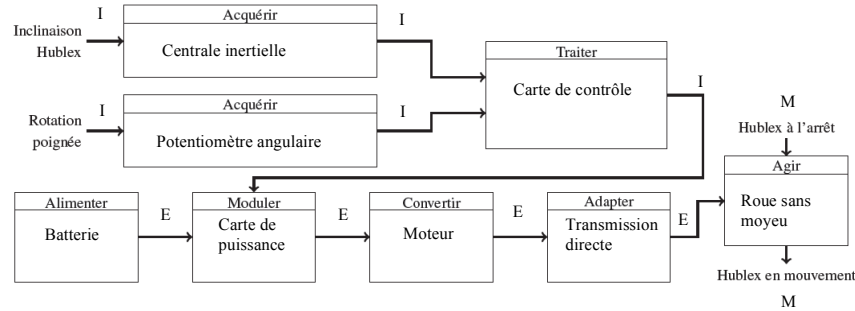
Le système ainsi corrigé répond au cahier des charges.

## PROBLÈME 3 GYROPODE HUBLEX



Q1

### DR1 - Schéma fonctionnel du Hublex



Q2

On se place dans les conditions d'Heaviside. Dans le domaine symbolique, les équations deviennent :

$$U(p) = E(p) + R \cdot I(p) + L \cdot p \cdot I(p) \quad (1)$$

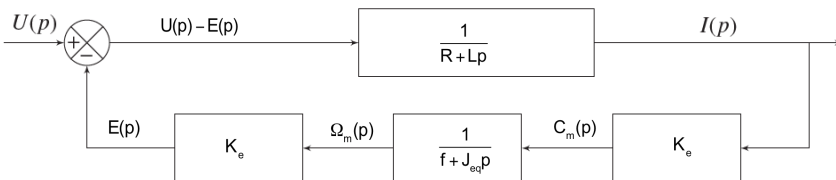
$$E(p) = K_e \cdot \Omega_m(p) \quad (2)$$

$$C_m(p) = K_e \cdot I(p) \quad (3)$$

$$J_{eq} \cdot p \cdot \Omega_m(p) = C_m(p) - f \cdot \Omega_m(p) \quad (4)$$

Q3

### DR3 - Schéma bloc du moteur piloté (contrôle du courant)



Q4 On lit sur le schéma précédent :

$$H_m(p) = \frac{1}{R + L \cdot p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_e^2}{(R + L \cdot p)(f + J_{eq} \cdot p)}} = \frac{1}{R + L \cdot p + \frac{K_e^2}{f + J_{eq} \cdot p}}$$

$$H_m(p) = \frac{f + J_{eq} \cdot p}{(R + L \cdot p)(f + J_{eq} \cdot p) + K_e^2} = \frac{f + J_{eq} \cdot p}{(K_e^2 + R \cdot f) + (R \cdot J_{eq} + L \cdot f) \cdot p + L \cdot J_{eq} \cdot p^2}$$

ou encore, sous forme canonique :

$$H_m(p) = \frac{f}{(K_e^2 + R \cdot f)} \frac{1 + \frac{J_{eq}}{f} \cdot p}{1 + \frac{(R \cdot J_{eq} + L \cdot f)}{(K_e^2 + R \cdot f)} \cdot p + \frac{L \cdot J_{eq}}{(K_e^2 + R \cdot f)} \cdot p^2}$$

soit :

$$H_m(p) = K_m \frac{1 + \tau_m \cdot p}{1 + \frac{2 \cdot z_m}{\omega_{0m}} \cdot p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} \cdot p^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_m = \frac{f}{K_e^2 + R \cdot f} \\ \tau_m = J_{eq} / f \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} \frac{2 \cdot z_m}{\omega_{0m}} = \frac{R \cdot J_{eq} + L \cdot f}{K_e^2 + R \cdot f} \\ \omega_{0m}^2 = \frac{K_e^2 + R \cdot f}{L \cdot J_{eq}} \end{cases} \quad \text{d'où on sort} \quad \begin{cases} z_m = \frac{R \cdot J_{eq} + L \cdot f}{2 \sqrt{L \cdot J_{eq} (K_e^2 + R \cdot f)}} \\ \omega_{0m} = \sqrt{\frac{K_e^2 + R \cdot f}{L \cdot J_{eq}}} \end{cases}$$

Q5 Classiquement, afin que la comparaison ait un sens c'est-à-dire qu'un écart nul corresponde bien à une erreur nulle, il faut choisir  $K_{iu} = K_{capt}$ .

Q6 Pour répondre à la question le plus simple est de calculer la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement qui vaut :

$$FTBO(p) = K_p H_m(p) K_{capt} = K_p K_m K_{capt} \frac{1 + \tau_m \cdot p}{1 + \frac{2 \cdot z_m}{\omega_{0m}} \cdot p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} \cdot p^2} = K' \frac{1 + \tau_m \cdot p}{1 + \frac{2 \cdot z_m}{\omega_{0m}} \cdot p + \frac{1}{\omega_{0m}^2} \cdot p^2}$$

puisque d'après la question précédente  $K_{iu} = K_{capt}$  et  $K' = K_{iu} \cdot K_p \cdot K_m$

Cette fonction de transfert en boucle ouverte est de classe nulle et de gain  $K' = K_{iu} \cdot K_p \cdot K_m$ , l'erreur en régime permanent pour une entrée indicielle est donc :

$$\mu_s = \frac{1}{1 + K'} \neq 0$$

Q7 L'exigence « 1.7.1.1.1 » qui impose une erreur statique nulle n'est pas vérifiée compte tenu du résultat qui précède.

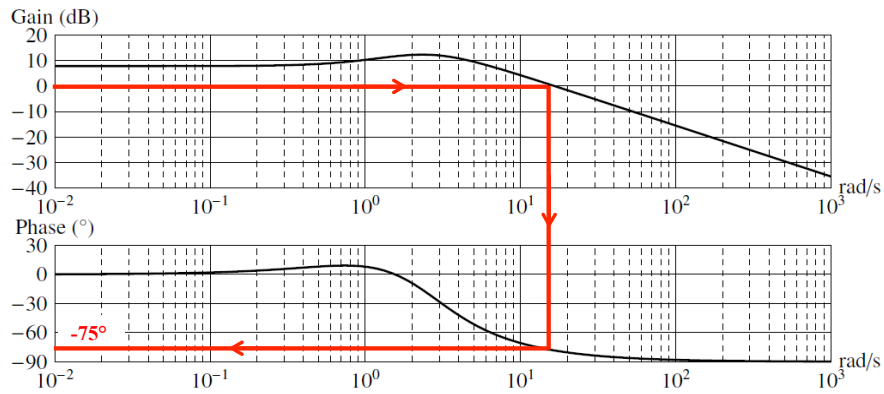
L'exigence « 1.7.1.1.4 » impose une marge de phase d'au moins 70°, on utilise alors le diagramme de Bode en boucle ouverte fourni pour estimer cette dernière. Voir page suivante. On y lit que pour la pulsation de coupure à 0dB la phase est de l'ordre de -75°.

La marge de phase est donc de l'ordre de :  $M\varphi = 180 - 75 = 105^\circ > 70^\circ$ .

L'exigence « 1.7.1.1.4 » est donc largement satisfaite.

Quoi qu'il en soit il suffit qu'une exigence ne soit pas satisfaite pour que le cahier des charges ne soit pas donc le cahier des charges n'est pas satisfait.

**DR4 - Diagrammes de Bode en boucle ouverte avec correction proportionnelle**

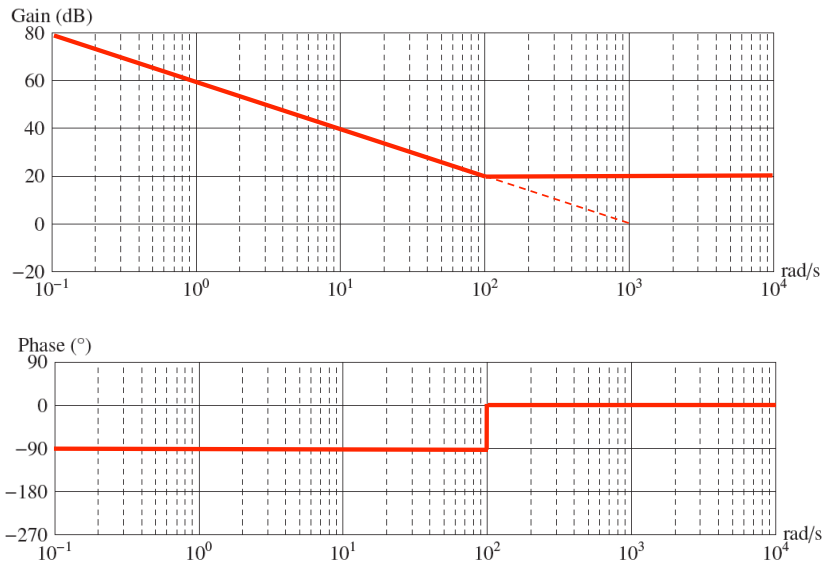


Q8 On réécrit  $C(p)$  sous forme canonique:  $C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} = \frac{K_i}{p} \left( 1 + \frac{K_p}{K_i} p \right)$

Cette forme met en évidence la classe 1 de ce correcteur. Il augmente donc la classe de la FTBO de l'asservissement et assure donc la précision attendue en régime permanent pour une entrée en échelon, c'est-à-dire le respect de l'exigence « 1.7.1.1.1 ».

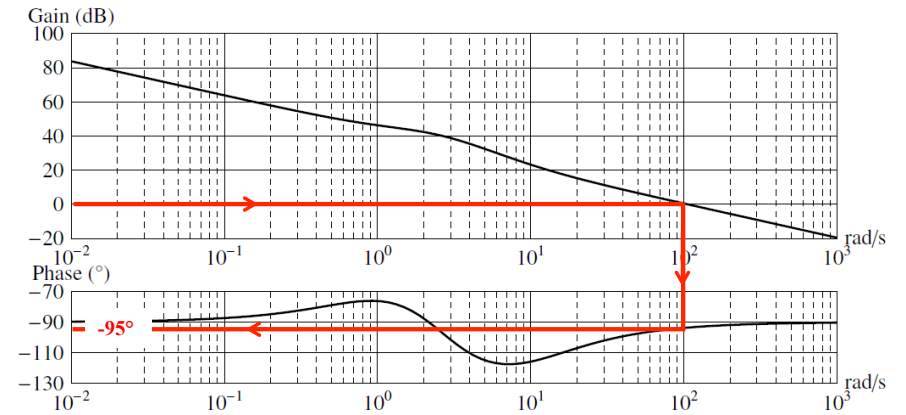
Q9 On trace les diagrammes asymptotiques demandés pour  $C(p) = \frac{1000}{p} \left( 1 + \frac{p}{100} \right)$

**DR5 - Diagrammes de Bode du correcteur**



Q10 On détermine la nouvelle marge de phase sur le diagramme corrigé :

**DR6 - Diagrammes de Bode en boucle ouverte avec correcteur PI**



$$M\phi = 180 - 95 = 85^\circ > 70^\circ$$

L'exigence « 1.7.1.1.4 » est donc toujours satisfaite.

Le cahier des charges est donc maintenant respecté en ce qui concerne les deux exigences étudiées. En revanche, on observe sur la figure 16 un pic de tension de plus de 100V au démarrage. Ceci ne respecte pas l'exigence « 1.6.1.1 » qui précise que la tension d'alimentation du moteur ne doit pas excéder 60V. Ceci explique que l'asservissement ne peut pas être directement implanté en l'état.

Q10 La figure 17 montre qu'une saturation en tension à 60V a été implantée dans la commande afin de protéger le moteur.

Une saturation présente l'inconvénient de ralentir un asservissement. Toutefois, si on compare les évolutions temporelles de l'intensité sur les figures 16 et 17, on s'aperçoit que ce ralentissement est minime.