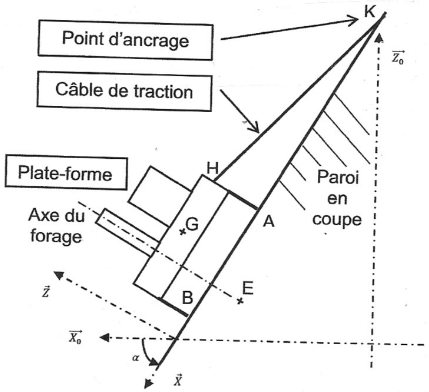
Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

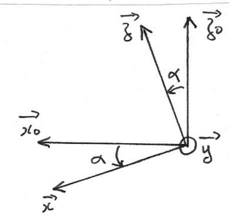
DM n°3 - Correction

ROBOT DE CONSOLIDATION DE PAROIS ROCHEUSES ROBOCLIMBER

II Vérification des critères de la fonction FT23 "enfoncer les tubes"

Question 1





- Inventaire des actions s'exerçant sur l'ensemble :

• $\mathcal{T}(\text{paroi} \to \text{robot}) = \left\{\begin{matrix} R_A \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} R_B \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_B$

(normales au contact car hypothèse d'absence de frottement)

• $\mathcal{T}(\text{câble} \to \text{robot}) = \left\{\begin{matrix} \vec{F}_{\text{câble}} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_H$

• $\mathcal{T}(\text{poussée} \to \text{robot}) = \left\{\begin{matrix} F\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_E$

• $\mathcal{T}(\text{pesanteur} \to \text{robot}) = \left\{\begin{matrix} -P\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$

- On calcule les différents moments en H :

• $\vec{M}_H(\text{paroi} \to \text{robot}) = \underbrace{R_A \vec{z} \wedge \vec{AH}}_{\vec{0} \text{ car } \vec{AH} // \vec{z}} + R_B \vec{z} \wedge \vec{BH} = R_B \vec{z} \wedge (-d\vec{x} + h\vec{z})$
$= \underline{-d R_B \vec{y}}$

• $\vec{M}_H(\text{câble} \to \text{robot}) = \underline{\vec{0}}$

• $\vec{M}_H(\text{poussée} \to \text{robot}) = F\vec{z} \wedge \vec{EH} = F\vec{z} \wedge \left(\dots \vec{z} - \frac{2d}{3}\vec{x}\right) = \underline{-\frac{2d}{3} F \vec{y}}$

• $\vec{M}_H(\text{pesanteur} \to \text{robot}) = -P\vec{z}_0 \wedge \vec{GH} = -P\vec{z}_0 \wedge -\frac{d}{2}\vec{x} = \underline{\frac{Pd}{2} \cos\alpha \, \vec{y}}$

- L'équation de moment en H fournit donc :

$-dR_B - \frac{2d}{3} F + \frac{P}{2} d \cos\alpha = 0$ soit $\boxed{-R_B - \frac{2}{3}F + \frac{P}{2}\cos\alpha = 0}$

Il vient donc $R_B = \frac{P}{2}\cos\alpha - \frac{2}{3}F$

La condition de non-décollement en B s'exprimant par $R_B > 0$, il vient donc que $\frac{P}{2}\cos\alpha - \frac{2}{3}F > 0$

soit $\boxed{F < \frac{3}{4} P \cos\alpha}$

Au delà de cette valeur, le pied le + bas (en B) décolle sous l'action du forage.

Ainsi : pour $\alpha = 45°$, $F_{Max} = \frac{3}{4} \times 28000 \times \cos 45° = \underline{14\,850\ N}$

pour $\alpha = 80°$, $F_{Max} = \frac{3}{4} \times 28000 \times \cos 80° = \underline{3650\ N}$

Le cahier des charges impose : $\boxed{\begin{matrix} \text{pour } \alpha = 45°,\ F > 10\,000\ N \\ \text{pour } \alpha = 80°,\ F > 3000\ N \end{matrix}}$

Ces valeurs sont donc bien compatibles.

- Pour $\alpha = 90°$, $\cos\alpha = 0$ donc $F_{Max} = 0$!

Un forage est donc impossible sur une paroi verticale.

V FT12 "Positionner et stabiliser la plateforme"

Question 13

- La plateforme (et ce qu'elle supporte) est soumise à :
  - L'action de la pesanteur : $\mathcal{T}_{pes\to1} = \begin{Bmatrix} -mg\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_1} = \begin{Bmatrix} -mg\vec{z_0} \\ -mg\vec{z_0}\wedge\overrightarrow{G_1I} \end{Bmatrix}_I$
  - L'action du forage : $\mathcal{T}_{forage\to1} = \begin{Bmatrix} F\vec{z} \\ C_f\vec{z} \end{Bmatrix}_I$
  - L'action du pied 2 : $\mathcal{T}_{2\to1} = \begin{Bmatrix} F_{2\to1}\vec{z_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{D_1} = \begin{Bmatrix} F_{2\to1}\vec{z_1} \\ \vec{F}_{2\to1}\wedge\overrightarrow{D_1I} \end{Bmatrix}_I$
  - L'action du pied 3 : $\mathcal{T}_{3\to1} = \begin{Bmatrix} F_{3\to1}\vec{z_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{C_1} = \begin{Bmatrix} F_{3\to1}\vec{z_1} \\ \vec{F}_{3\to1}\wedge\overrightarrow{C_1I} \end{Bmatrix}_I$

NB : L'énoncé demandant de ne pas développer, les moments sont laissés sous forme vectorielle

- L'écriture du PFD permet alors d'écrire que :

$$\mathcal{D}_{1/0} = \mathcal{T}_{pes\to1} + \mathcal{T}_{forage\to1} + \mathcal{T}_{2\to1} + \mathcal{T}_{3\to1}$$

ce qui fournit, en modèle plan, deux équations de résultante sur $\vec{y_1}$ et $\vec{z_1}$ et une équation de moment en I sur $\vec{x}$:

$$\boxed{\begin{aligned} & m\vec{a}(G_1,1/0)\cdot\vec{y_1} = -mg\vec{z_0}\cdot\vec{y_1} + F\vec{z}\cdot\vec{y_1} \\ & m\vec{a}(G_1,1/0)\cdot\vec{z_1} = -mg\vec{z_0}\cdot\vec{z_1} + F\vec{z}\cdot\vec{z_1} + F_{2\to1} + F_{3\to1} \\ & \vec{\delta}_I(1/0)\cdot\vec{x} = (-mg\vec{z_0}\wedge\overrightarrow{G_1I})\cdot\vec{x} + C_f\underbrace{\vec{z}\cdot\vec{x}}_{0} + (\vec{F}_{2\to1}\wedge\overrightarrow{D_1I})\cdot\vec{x} \\ & \qquad + (\vec{F}_{3\to1}\wedge\overrightarrow{C_1I})\cdot\vec{x} \end{aligned}}$$

Equations non développées, comme demandé !

Question 14

D'après l'écriture du PFD qui précède, il faut calculer :

$$\begin{cases} m\vec{a}(G_1,1/0)\cdot\vec{y_1} \\ m\vec{a}(G_1,1/0)\cdot\vec{z_1} \\ \vec{\delta}_I(1/0)\cdot\vec{x} \end{cases}$$

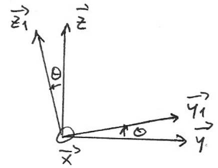
- $\vec{V}(G_1,1/0) = \vec{V}(G_1/0) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OG_1}\right]_0 = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IG_1}\right]_0 = \left[\frac{d}{dt} y\vec{Y} + z\vec{Z} + a\vec{z_1}\right]_0$

$\vec{V}(G_1,1/0) = \dot{y}\vec{Y} + \dot{z}\vec{Z} - a\dot{\theta}\vec{y_1}$

et donc $\vec{a}(G_1,1/0) = \ddot{y}\vec{Y} + \ddot{z}\vec{Z} - a\ddot{\theta}\vec{y_1} - a\dot{\theta}^2\vec{z_1}$

car : $\left[\frac{d\vec{z_1}}{dt}\right]_0 = -\dot{\theta}\vec{y_1}$; $\left[\frac{d\vec{y_1}}{dt}\right]_0 = \dot{\theta}\vec{z_1}$

Sachant que
$\vec{Y}\cdot\vec{y_1} = \cos\theta$
$\vec{Z}\cdot\vec{y_1} = \sin\theta$
$\vec{Y}\cdot\vec{z_1} = -\sin\theta$
$\vec{Z}\cdot\vec{z_1} = \cos\theta$



Il vient

$$\boxed{\begin{aligned} & m\vec{a}(G_1,1/0)\cdot\vec{y_1} = m\left[\ddot{y}\cos\theta + \ddot{z}\sin\theta - a\ddot{\theta}\right] \\ & m\vec{a}(G_1,1/0)\cdot\vec{z_1} = m\left[-\ddot{y}\sin\theta + \ddot{z}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\right] \end{aligned}}$$

- $\vec{\delta}_I(1/0) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_I(1/0)\right]_0 + m\vec{V}(I/0)\wedge\vec{V}(G_1/0)$

donc $\vec{\delta}_I(1/0)\cdot\vec{x} = \underbrace{\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_I(1/0)\right]_0\cdot\vec{x}}_{} + m\left[\vec{V}(I/0)\wedge\vec{V}(G_1/0)\right]\cdot\vec{x}$

$= \frac{d}{dt}\vec{\sigma}_I(1/0)\cdot\vec{x}$ car $\vec{x}$ est fixe/0.

- $\vec{\sigma}_I(1/0) = m\overrightarrow{IG_1}\wedge\vec{V}(I,1/0) + I_{I,1}\vec{\Omega}_{1/0}$

où $m\overrightarrow{IG_1}\wedge\vec{V}(I,1/0) = m\,a\vec{z_1}\wedge(\dot{y}\vec{Y} + \dot{z}\vec{Z})$

NB $\vec{V}(I,1/0) = \vec{V}(I/0) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OI}\right]_0$

soit $m\,\overrightarrow{IG_1}\wedge\vec v(I,1/0) = ma\left(-\dot y\cos\theta\,\vec x - \dot z\sin\theta\,\vec x\right)$

et $I_{I,1}\,\vec\Omega_{1/0} = \begin{pmatrix}A&-F&-E\\-F&B&-D\\-E&-D&C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\theta\\0\\0\end{pmatrix}_{\vec x,\vec y_1,\vec z_1} = \begin{pmatrix}A\dot\theta\\-F\dot\theta\\-E\dot\theta\end{pmatrix}_{\vec x,\vec y_1,\vec z_1}$

Donc $\vec\sigma_I(1/0)\cdot\vec x = A\dot\theta - ma\left(\dot y\cos\theta + \dot z\sin\theta\right)$

et donc $\dfrac{d}{dt}\vec\sigma_I(1/0)\cdot\vec x = A\ddot\theta - ma\left(\ddot y\cos\theta - \dot y\dot\theta\sin\theta + \ddot z\sin\theta + \dot z\dot\theta\cos\theta\right)$

ou encore $\underline{\dfrac{d}{dt}\vec\sigma_I(1/0)\cdot\vec x = A\ddot\theta - ma\left[(\ddot y + \dot z\dot\theta)\cos\theta + (\ddot z - \dot y\dot\theta)\sin\theta\right]}$

- $\vec V(I/0)\wedge\vec V(G_1/0) = (\dot y\,\vec y + \dot z\,\vec z)\wedge(\dot y\,\vec y + \dot z\,\vec z - a\dot\theta\,\vec y_1)$

$= (\dot y\,\vec y + \dot z\,\vec z)\wedge -a\dot\theta\,\vec y_1$

$= -a\dot y\dot\theta\sin\theta\,\vec x + a\dot z\dot\theta\cos\theta\,\vec x$

et donc $\underline{\left[\vec V(I/0)\wedge\vec V(G_1/0)\right]\cdot\vec x = a\dot\theta\left[-\dot y\sin\theta + \dot z\cos\theta\right]}$

- En regroupant :

$\vec\delta_I(1/0)\cdot\vec x = A\ddot\theta - ma\left[(\ddot y + \cancel{\dot z\dot\theta})\cos\theta + (\ddot z - \cancel{\dot y\dot\theta})\sin\theta\right] + ma\left[\cancel{-\dot y\dot\theta\sin\theta} + \cancel{\dot z\dot\theta\cos\theta}\right]$

Soit, après simplifications :

$$\boxed{\vec\delta_I(1/0)\cdot\vec x = A\ddot\theta - ma\left[\ddot y\cos\theta + \ddot z\sin\theta\right]}$$

Question 15

Il semble que les approximations attendues soient :

$$\boxed{\begin{aligned} m\vec a(G_1,1/0)\cdot\vec y_1 &= m\left[\ddot y - a\ddot\theta\right]\\ m\vec a(G_1,1/0)\cdot\vec z_1 &= m\ddot z\\ \vec\delta_I(1/0) &= A\ddot\theta - ma\ddot y\end{aligned}}$$

Question 16

On écrit $\begin{pmatrix}m\ddot y - ma\ddot\theta\\ m\ddot z\\ A\ddot\theta - ma\ddot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&m&-ma\\m&0&0\\0&-ma&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot z\\\ddot y\\\ddot\theta\end{pmatrix}$

où on identifie la matrice demandée, dite "des masses".

$$\boxed{[M] = \begin{pmatrix}0&m&-ma\\m&0&0\\0&-ma&A\end{pmatrix}}$$

Question 17

$$[M]\begin{pmatrix}\ddot z\\\ddot y\\\ddot\theta\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0\\2\mu&0&0\\2b\mu&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dot z\\\dot y\\\dot\theta\end{pmatrix}}_{\text{actions dues à la dissipation d'énergie}} + \underbrace{\begin{bmatrix}0&0&-mg\cos\alpha\\2k&0&0\\-2bk&2bk&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}z\\y\\\theta\end{pmatrix}}_{\text{actions dues au comportement élastique des matériaux.}} = [F]$$

Lycée Clemenceau Nantes - Olivier Le Gallo - SII

Question 18

En développant l'équation matricielle il vient

$$\begin{cases} m\ddot{y} - ma\ddot{\theta} - mg\cos\alpha.\theta = F_y & (1) \\ m\ddot{z} + 2\mu\dot{z} + 2kz = F_z & (2) \\ A\ddot{\theta} - ma\ddot{y} + 2b\mu\dot{z} - 2bkz + 2bky = M_x & (3) \end{cases}$$

- L'équation (2) montre que les déplacements selon $\vec{z}$ sont découplés des autres mouvements
- l'équation (1) montre que les déplacements selon $\vec{y}$ sont fortement couplés avec la rotation.
- L'équation (3) montre que ce sont les déplacement selon $\vec{z}$ (terme en $2b\mu\dot{z}$) qui amortissent l'ensemble.

Question 19

Une matrice carrée est inversible si son déterminant est $\neq 0$.

Ici $\mathrm{Det}[M] = \begin{vmatrix} 0 & m & -ma \\ m & 0 & 0 \\ 0 & -ma & A \end{vmatrix} = m\left(mA - m^2a^2\right)$

$$\boxed{\mathrm{Det}[M] = m^2(A - ma^2)}$$

la matrice $[M]$ sera donc inversible si $A - ma^2 \neq 0$

or A est le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à $(I, \vec{x})$.

D'après le théorème de Huygens $\boxed{I_{S/(I,\vec{x})} = I_{S/(G_1,\vec{x})} + ma^2}$

puisque a est la distance entre I et G_1.

Ainsi $(A - ma^2)$ n'est autre que $I_{S/(G_1,\vec{x})}$, moment d'inertie de l'ensemble par rapport à $(G_1, \vec{x})$. Comme tout moment d'inertie, il s'agit d'un nombre positif .(strictement)

→ La matrice $[M]$ est donc nécessairement inversible.

Question 20

Les valeurs propres de la matrice B sont :

$3{,}3\ 10^4\ (\mathrm{rad.s^{-1}})^2$

$0{,}2\ 10^5$ "

$5{,}1\ 10^5$ "

Ainsi, d'après les indications de l'énoncé les pulsations et fréquences propres du système sont donc :

$$\omega_1 = \sqrt{3{,}3.10^4} = 182\ \mathrm{rad/s} \rightarrow f_1 = 29\ \mathrm{Hz}$$

$$\omega_2 = \sqrt{0{,}2.10^5} = 141\ \mathrm{rad/s} \rightarrow f_2 = 22\ \mathrm{Hz}$$

$$\omega_3 = \sqrt{5{,}1.10^5} = 714\ \mathrm{rad/s} \rightarrow f_3 = 114\ \mathrm{Hz}$$

Le cahier des charges impose des fréquences propres qui soient supérieures à 20 Hz. Il est donc respecté.