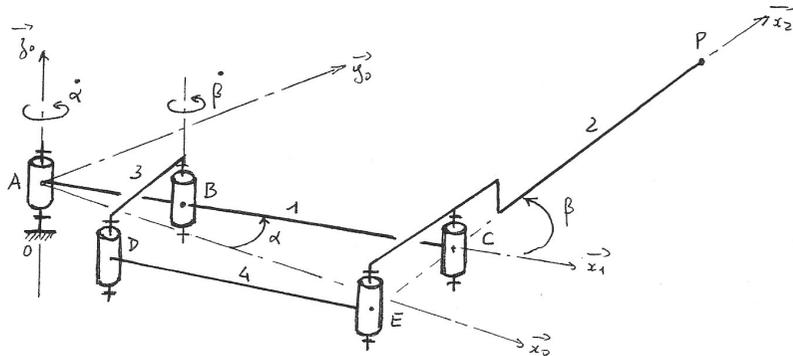


EXERCICE  
ROBOT PORTE-OUTIL À MOUVEMENT PLAN



1 - Étude structurelle

1) Représenter le schéma cinématique donné précédemment selon une perspective isométrique où  $\vec{z}_0$  est la verticale ascendante.



2 - Étude cinématique

21) Déterminer en fonction de la longueur  $L$ , des angles  $\alpha$  et  $\beta$  et de leurs dérivées  $\dot{\alpha}$  et  $\dot{\beta}$  par rapport au temps, dans la base où leur expression est la plus simple :

- le torseur cinématique de 1/0
- le torseur cinématique de 3/1
- le torseur cinématique de 4/1
- le torseur cinématique de 2/1
- le torseur cinématique de 2/0.

• 
$$\mathcal{V}_{1/0} = \begin{cases} \dot{\alpha} \vec{\delta}_0 \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{cases} \quad \text{Liaison pivot d'axe } (A, \vec{\delta}_0) \text{ avec } \omega_{10} = \dot{\alpha}$$

• 
$$\mathcal{V}_{3/1} = \begin{cases} \dot{\beta} \vec{\delta}_0 \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{cases} \quad \text{Liaison pivot d'axe } (B, \vec{\delta}_0) \text{ avec } \omega_{31} = \dot{\beta}$$
  
car la structure du //lozange (BCED) impose  $\vec{x}_3 = \vec{x}_2$

• 
$$\mathcal{V}_{4/1} = \begin{cases} \vec{0} \\ -L\dot{\beta} \vec{y}_2 \end{cases}$$
 ... mouvement de translation pure due à la structure de //lozange ( $\vec{x}_4 = \vec{x}_1$ )  
... Comme dans toute translation pure tous les pts ont la même vitesse, par exemple :

$$\begin{aligned} \vec{V}(D, 4/1) &= \vec{V}(D, 4/3) + \vec{V}(D, 3/1) \\ &= \vec{0} + \vec{V}(B, 3/1) + \vec{r}_{D,3/1} \wedge \vec{\omega}_{31} \\ &= \vec{0} + \vec{0} + \dot{\beta} \vec{\delta}_0 \wedge -L\vec{x}_2 = -L\dot{\beta} \vec{y}_2 \end{aligned}$$

• 
$$\mathcal{V}_{2/1} = \begin{cases} (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{\delta}_0 \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{cases}$$
 Liaison pivot d'axe  $(C, \vec{\delta}_0)$  avec  $\omega_{21} = \dot{\beta}$

• 
$$\mathcal{V}_{2/0} = \mathcal{V}_{2/1} + \mathcal{V}_{1/0} \text{ soit } \mathcal{V}_{2/0} = \begin{cases} (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{\delta}_0 \\ \vec{0} \\ 6L\dot{\alpha} \vec{y}_1 \end{cases}$$

en effet 
$$\begin{aligned} \vec{V}(C, 2/0) &= \vec{V}(C, 2/1) + \vec{V}(C, 1/0) \\ &= \vec{0} + \vec{V}(A, 1/0) + \vec{r}_{C,1/0} \wedge \vec{\omega}_{10} \\ &= \vec{0} + \vec{0} + \dot{\alpha} \vec{\delta}_0 \wedge 6L\vec{x}_1 \\ &= 6L\dot{\alpha} \vec{y}_1 \end{aligned}$$

NB il est tout aussi simple d'exprimer ce dernier torseur en A.

ou calculé alors 
$$\begin{aligned} \vec{V}(A, 2/0) &= \vec{V}(A, 2/1) + \vec{V}(A, 1/0) \\ &= \vec{V}(C, 2/1) + \vec{r}_{A,2/1} \wedge \vec{\omega}_{21} + \vec{0} \\ &= \vec{0} + \dot{\beta} \vec{\delta}_0 \wedge -6L\vec{x}_1 + \vec{0} = -6L\dot{\beta} \vec{y}_1 \end{aligned}$$

d'où 
$$\mathcal{V}_{2/0} = \begin{cases} (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{\delta}_0 \\ \vec{0} \\ -6L\dot{\beta} \vec{y}_1 \end{cases}$$

22) Dans le cas général où  $\dot{\alpha}$  et  $\dot{\beta}$  sont non nuls et distincts, exprimer en fonction de  $L$ , des angles  $\alpha$  et  $\beta$  et de leurs dérivées  $\dot{\alpha}$  et  $\dot{\beta}$  par rapport au temps, dans la base où leur expression est la plus simple :

- le vecteur vitesse angulaire de 4/0 :  $\vec{\Omega}(4/0)$
- les vecteurs vitesse par rapport au bâti des centres d'inertie des solides 1, 2 et 4 :  
 $\vec{V}(G_1, 1/0)$   
 $\vec{V}(G_2, 2/0)$   
 $\vec{V}(G_4, 4/0)$

•  $\vec{\omega}_{4/0} = \vec{\omega}_{1/0}$  car translation circulaire de  $4/1$  d'où  $\vec{\omega}_{4/0} = \dot{\alpha} \vec{z}_0$

•  $\vec{v}(G_1, 1/0) = \vec{v}(A, 1/0) + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AG_1}$   
 $= \vec{0} + \dot{\alpha} \vec{z}_0 \wedge 3L \vec{x}_1$  d'où  $\vec{v}(G_1, 1/0) = 3L \dot{\alpha} \vec{y}_1$

•  $\vec{v}(G_2, 2/0) = \vec{v}(C, 2/0) + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \overrightarrow{CG_2}$   
 avec d'après la question 31) :

$\vec{v}(C, 2/0) = 6L \dot{\alpha} \vec{y}_1$   
 et  $\vec{\omega}_{2/0} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0$

d'où  $\vec{v}(G_2, 2/0) = 6L \dot{\alpha} \vec{y}_1 + (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \wedge 3L \vec{x}_2$

soit  $\vec{v}(G_2, 2/0) = 6L \dot{\alpha} \vec{y}_1 + 3L(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2$

•  $\vec{v}(G_4, 4/0) = \vec{v}(G_4, 4/1) + \vec{v}(G_4, 1/0)$

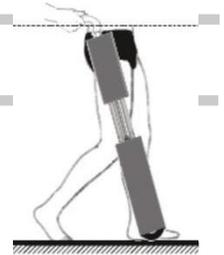
avec  $\vec{v}(G_4, 4/1) = -L \dot{\beta} \vec{y}_2$  translation circulaire  $\mathcal{V}_{4/1} = \begin{cases} \vec{0} \\ -L \dot{\beta} \vec{y}_2 \end{cases}$

et  $\vec{v}(G_4, 1/0) = \vec{v}(A, 1/0) + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AG_4} = \vec{0} + \dot{\alpha} \vec{z}_0 \wedge (2L \vec{x}_1 - L \vec{x}_2 + 2L \vec{x}_4)$   
 $= \dot{\alpha} (4L \vec{y}_1 - L \vec{y}_2)$

d'où  $\vec{v}(G_4, 4/0) = -L \dot{\beta} \vec{y}_2 + \dot{\alpha} (4L \vec{y}_1 - L \vec{y}_2)$

soit  $\vec{v}(G_4, 4/0) = -L(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 + 4L \dot{\alpha} \vec{y}_1$

## PROBLÈME CANNE ROBOTISÉE



Corrigé fourni par l'UPSTI légèrement modifié  
<http://www.upsti.fr/>

### Partie I - Étude de la marche

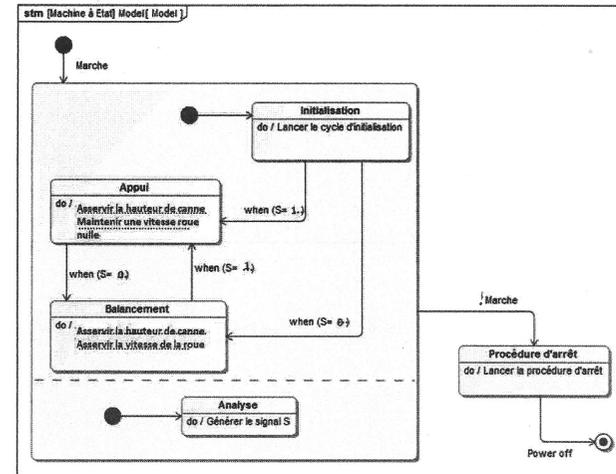
Q1. Selon la figure 4, en marche saine, les évolutions des efforts normaux sur chaque jambe et les durées de chacune des phases sont identiques. La figure 5 montre que, lors d'une marche perturbée, la phase de double appui est plus longue, 20% au lieu de 10% du cycle de marche - phase rassurante et moins douloureuse - et que la jambe invalide (gauche ici) est moins sollicitée avec un temps d'appui plus court (30% au lieu de 40%). Les efforts normaux sont en moyenne équivalents en intensité pour les deux marches, cependant leurs évolutions diffèrent dans le cas de la marche perturbée avec un effort quasi constant lors de l'appui de la jambe invalide et un effort également plus constant lors de l'appui de la jambe valide.

Q2. La canne prend en charge une partie des efforts normaux supportés par la jambe invalide. On relève une valeur moyenne maximale  $N_{MAX} \approx 0,25 \times F_{MAX}$  avec  $F_{MAX} = m_{sujet} \times g = 71,4 \times 9,81 \approx 700 \text{ N}$ . Donc  $N_{MAX} \approx 175 \text{ N}$ .

### Partie III - Étude de l'exigence Id3.1.6 « Élaborer la commande des axes asservis »

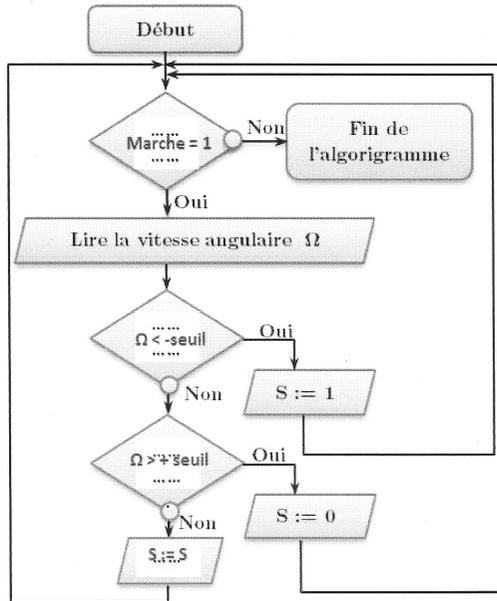
Q8. On peut écrire la fermeture géométrique suivante :  $\vec{IA} + \vec{AH} = \vec{IH}$ , c'est à dire  $R \cdot \vec{j}_0 + \ell(t) \cdot \vec{j}_3 = x \cdot \vec{i}_0 + h \cdot \vec{j}_0$ .  
 Par projection sur  $\vec{j}_0$ , il vient :  
 $R + \ell(t) \cdot \cos(\theta(t)) = h = h_0$

Q9. On propose le diagramme d'états suivant :



**Q10.** La valeur maximale de  $\Omega$  est environ 130 rad/s. On choisit donc une valeur de la variable *Seuil* telle que *Seuil* = 1,3 rad/s.

**Q11.** On propose l'algorithme suivant :



#### Partie IV - Étude de la phase de balancement

**Q12.**  $\vec{V}_{(H,3/2)} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{AH} \right]_{B_2} = \left[ \frac{d}{dt} (\ell(t) \cdot \vec{j}_2) \right]_{B_2} = \dot{\ell}(t) \cdot \vec{j}_2$

**Q13.**  $\vec{V}_{(H,2/0)} = \vec{V}_{(H,2/1)} + \vec{V}_{(H,1/0)}$

or  
 $\vec{V}_{(H,2/1)} = \vec{V}_{(A,2/1)} + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \overrightarrow{AH}$   
 $= \vec{0} + \omega \cdot \vec{k}_0 \wedge \ell \cdot \vec{j}_2$   
 $= -\ell \cdot \omega \cdot \vec{i}_2$

et  
 $\vec{V}_{(H,1/0)} = \vec{V}_{(I,1/0)} + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \overrightarrow{IH}$   
 $= \vec{0} + (\vec{\Omega}(1/2) + \vec{\Omega}(2/0)) \wedge (R \cdot \vec{j}_0 + \ell \cdot \vec{j}_2)$   
 $= (-\omega \cdot \vec{k}_0 + \dot{\theta} \cdot \vec{k}_0) \wedge (R \cdot \vec{j}_0 + \ell \cdot \vec{j}_2)$   
 $= (\omega - \dot{\theta}) \cdot R \cdot \vec{i}_0 + (\omega - \dot{\theta}) \cdot \ell \cdot \vec{i}_2$

Finalement,  
 $\vec{V}_{(H,2/0)} = (\omega - \dot{\theta}) \cdot R \cdot \vec{i}_0 - \dot{\theta} \cdot \ell \cdot \vec{i}_2$

**Q14.**  $\vec{V}_{(H,3/0)} = \vec{V}_{(H,3/2)} + \vec{V}_{(H,2/0)}$  donc  
 $\vec{V}_{(H,3/0)} = \dot{\ell} \cdot \vec{j}_2 + (\omega - \dot{\theta}) \cdot R \cdot \vec{i}_0 - \dot{\theta} \cdot \ell \cdot \vec{i}_2$

**Q15.** D'après le cahier des charges,

$$\begin{cases} \vec{V}_{(H,3/0)} \cdot \vec{i}_0 = V \\ \vec{V}_{(H,3/0)} \cdot \vec{j}_0 = 0 \end{cases}$$

En réalisant les projections, il vient :

$$\begin{cases} -\dot{\ell} \cdot \sin(\theta) - \ell \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) + (\omega - \dot{\theta}) \cdot R = V \\ \dot{\ell} \cdot \cos(\theta) - \ell \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

La première équation permet d'isoler  $\omega$ , tel que :

$$\omega = \frac{1}{R} (V + R \cdot \dot{\theta} + \dot{\ell} \cdot \sin(\theta) + \ell \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta)).$$

La seconde équation, en remarquant que  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  lors du cycle de marche, permet d'isoler  $\dot{\ell}$  :

$$\dot{\ell} = \ell \cdot \dot{\theta} \cdot \tan(\theta).$$

Il vient :

$$\omega = \frac{V}{R} + \left( 1 + \ell \cdot \frac{\tan(\theta) \cdot \sin(\theta)}{R} + \ell \cdot \frac{\cos(\theta)}{R} \right) \cdot \dot{\theta}$$

ou encore :

$$\omega = \frac{V}{R} + \left( 1 + \ell \cdot \frac{\sin^2(\theta)}{R \cdot \cos(\theta)} + \ell \cdot \frac{\cos^2(\theta)}{R \cdot \cos(\theta)} \right) \cdot \dot{\theta}$$

et après simplification :

$$\omega = \frac{V}{R} + \left( 1 + \frac{\ell}{R \cdot \cos(\theta)} \right) \cdot \dot{\theta}$$

#### Partie VI - Modélisation et analyse de la commande lors de la phase d'appui

**Q28.** D'après les données,  $K_{ve} = \frac{pas}{(2\pi)} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2\pi} \approx 4,77 \cdot 10^{-4}$  m/rad.

Le codeur a une résolution de 500 impulsions par tour, donc  $K_{codeur} = \frac{500}{2\pi} \approx 79,6$  imp/rad.

**Q29.** D'après le schéma bloc,  $\epsilon(p) = K_{adapt} \cdot X_c(p) - K_{codeur} \cdot \frac{X(p)}{K_{ve}}$ . Ainsi pour vérifier  $\epsilon(p) = 0$  lorsque  $X_c(p) = X(p)$ , il faut prendre :

$$K_{adapt} = \frac{K_{codeur}}{K_{ve}}. \text{ L'application numérique donne } K_{adapt} = \frac{79,6}{4,77 \cdot 10^{-4}} \approx 166\,700 \text{ imp/m.}$$

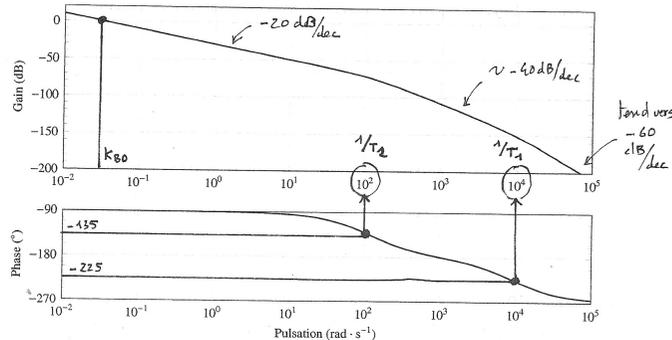
**Q30.** L'allure des courbes de gain et de phase de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte montre clairement que le comportement est équivalent à celui d'un système du second ordre (avec coefficient d'amortissement  $z > 1$ , car les courbes présentent deux cassures nettes en  $\omega_{c1} = 1/T_1$  et  $\omega_{c2} = 1/T_2$ ) associé à un intégrateur pur (pente de  $-20$  dB/dec quand  $\omega \rightarrow 0$  pour la courbe de gain et asymptote à  $-90^\circ$  quand  $\omega \rightarrow 0$  pour la courbe de phase). La forme canonique factorisée peut donc se mettre sous la forme :

$$H_{BO}(p) = K_{BO} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + T_1 \cdot p} \cdot \frac{1}{1 + T_2 \cdot p}$$

On relève sur les courbes :

$$\left. \begin{aligned} \omega_{c1} &\approx 10^4 \text{ rad/s, donc } T_1 = 10^{-4} \text{ s} = 0,1 \text{ ms,} \\ \omega_{c2} &\approx 10^2 \text{ rad/s, donc } T_2 = 10^{-2} \text{ s} = 10 \text{ ms,} \end{aligned} \right\} \text{ imprécis}$$

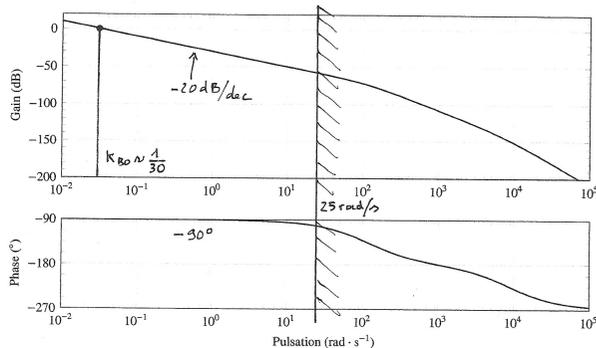
$$K_{BO} \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$



DR 4 – Diagramme de Bode (courbe de Gain et courbe de Phase) du système non perturbé en boucle ouverte pour  $C(p) = 1$

**Q31.** Une cadence de 113 pas par minute correspond à une fréquence de marche de l'ordre de  $\frac{113}{60} \approx 1,88$  Hz.

**Q32.**  $F_{MAX} = 4$  Hz correspond à une sollicitation de pulsation  $\omega_{MAX} = 4 \times 2\pi \approx 25$  rad/s. On constate que  $\omega_{MAX} < \omega_{c2} = 100$  rad/s  $\ll \omega_{c1} = 10^4$  rad/s. Pour  $\omega < \omega_{MAX}$ , le système se comporte donc comme un intégrateur pur de gain égal à  $K_{BO}$ . L'approximation de  $H_{BO}(p)$  par  $K_{BO}/p$  avec  $K_{BO} = 1/30 \approx 0,03$  est donc acceptable.



**Q33.** En appliquant la formule de Black, il vient  $H_{BF}(p) = \frac{K_{corr} \cdot K_{BO} / p}{1 + K_{corr} \cdot K_{BO} / p}$ , avec  $K_{corr} = 1$ , on obtient :

$$H_{BF}(p) = \frac{K_{BO}}{p + K_{BO}}, \text{ soit sous forme canonique : } H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{BO}} \cdot p}$$

La fonction de transfert est donc celle d'un système du 1er ordre, de gain unitaire et de constante de temps  $1/K_{BO} = 30$  s.

Les performances de ce système sont donc :

- système stable car système du 1er ordre  $\Rightarrow$  cdcf vérifié,
  - système précis car de gain unitaire  $\Rightarrow$  cdcf vérifié,
  - système ne présente pas de dépassement car système du 1er ordre  $\Rightarrow$  cdcf vérifié,
  - $tr_{5\%} = 3 \times 30 = 90$  s  $\Rightarrow$  cdcf non vérifié car le temps de réponse attendu est de 60 ms.
- Le système avec  $K_{corr} = 1$  est donc trop lent.

**Q34.** Il faut alors augmenter  $K_{corr}$ , tel que  $tr_{5\%} = 3 \times \frac{1}{K_{corr} \cdot K_{BO}} \leq 60$  ms. Donc  $K_{corr} \geq \frac{3}{60 \cdot 10^{-3} \cdot K_{BO}}$ . L'application numérique donne  $K_{corr} \geq 1500$ .

**Q35.** L'allure de la réponse ne correspond pas à celle d'un système du 1er ordre car un dépassement est observé. Avec  $K_{corr} = 1500$ , le système en boucle ouverte ne peut plus être modélisé par un intégrateur pur de gain  $K_{BO}$ , en effet cette valeur élevée de  $K_{corr}$  fait monter la courbe de gain, le système a une bande passante plus élevée et l'action du terme  $\frac{1}{1 + T_2 \cdot p}$  ne peut plus être négligée. Le comportement du système doit donc être modélisé par celui d'un système du second ordre pour se rapprocher du comportement observé.

**Q36.** Le critère de précision est satisfait du fait de la présence du terme intégrateur en  $\frac{1}{p}$  dans la fonction de transfert en boucle ouverte du système.

Pour assurer un 1er dépassement  $D1\% \leq 5\%$ , il faut que le système du second ordre ait un coefficient d'amortissement  $z$ , tel que  $z \geq 0,7$ . On détermine l'expression de  $H_{BF}(p)$ , la fonction de transfert en boucle fermée, afin d'identifier  $z$ .

$$\text{D'après la formule de Black, } H_{BF}(p) = \frac{K_{corr} \cdot H_{BO}(p)}{1 + K_{corr} \cdot H_{BO}(p)} = \frac{K_{corr} \cdot K_{BO}}{K_{corr} \cdot K_{BO} + p \cdot (1 + \tau_{BO} \cdot p)}$$

La forme canonique de  $H_{BF}(p)$  est donc :

$$H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{corr} \cdot K_{BO}} \cdot p + \frac{\tau_{BO}}{K_{corr} \cdot K_{BO}} \cdot p^2}$$

Par identification,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{corr} \cdot K_{BO}}{\tau_{BO}}} \text{ et } z = \frac{1}{2} \cdot \omega_0 \cdot \frac{1}{K_{corr} \cdot K_{BO}}$$

$$\text{donc, } z = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau_{BO} \cdot K_{corr} \cdot K_{BO}}}$$

La condition  $z \geq 0,7$  implique donc  $K_{corr} \leq \frac{1}{(2 \times 0,7)^2 \cdot \tau_{BO} \cdot K_{BO}}$ .

L'application numérique donne  $K_{corr} \leq 1700$ . On prend donc  $K_{corr}^{MAX} = 1700$ .

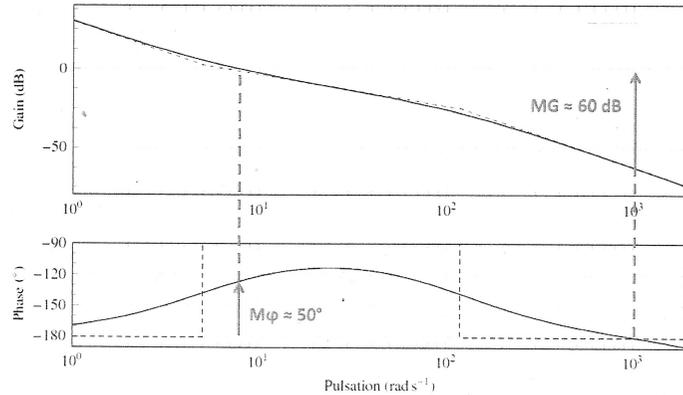
**Q37.** D'après l'abaque du temps de réponse réduit, pour  $z = 0,7$  on relève  $tr_{5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$ . Or

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{corr}^{MAX} \cdot K_{BO}}{\tau_{BO}}}, \text{ donc } tr_{5\%} = 3 \cdot \sqrt{\frac{\tau_{BO}}{K_{corr}^{MAX} \cdot K_{BO}}}$$

L'application numérique donne :  $tr_{5\%} \approx 38$  ms  $\Rightarrow$  cdcf vérifié !

**Q38.** Les performances de stabilité, rapidité et de 1er dépassement sont vérifiées. Cependant, le système avec correction proportionnelle n'arrive pas à atténuer suffisamment la perturbation (l'erreur est de l'ordre de 15 à 20% bien supérieure au 5% du cahier des charges). Un autre type de correction doit donc être envisagé pour satisfaire l'ensemble des critères.

**Q39.** D'après la figure page suivante, on relève une marge de Gain  $M_G \approx 60$  dB et une marge de Phase  $M_\phi \approx 50^\circ$ . Avec ces valeurs le cahier des charges ( $M_G = 45$  dB et  $M_\phi = 35^\circ$ ) est vérifié.



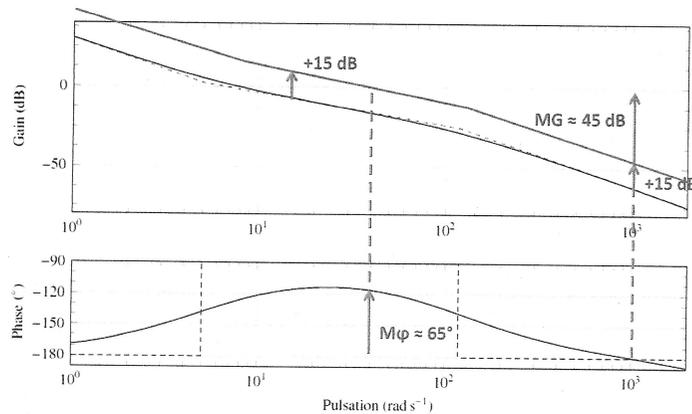
**Q40.** La modification de la valeur du gain  $K_{corr}$  n'affecte que la courbe de gain. L'augmentation de  $K_{corr}$  va faire remonter la courbe de gain du système en boucle ouverte. Graphiquement, on observe que c'est le critère sur la marge de Gain qui limite la remontée de la courbe de gain (voir figure page suivante). La courbe de gain peut donc être remontée de +15 dB, on relève alors une marge de Gain  $M_G \approx 45$  dB et une marge de Phase  $M_\phi \approx 65^\circ$ .

Initialement on avait  $K_{corr}^{init} = 1000$ , pour remonter la courbe de gain de +15 dB, il faudra prendre  $K_{corr}^{new}$  tel que :

$$20 \times \log(K_{corr}^{new}) = 20 \times \log(K_{corr}^{init}) + 15$$

$$\Leftrightarrow K_{corr}^{new} = K_{corr}^{init} \times 10^{15/20}$$

L'application numérique donne  $K_{corr}^{new} \approx 5620$ .



**Q41.** Avec cette correction la réponse temporelle respecte l'ensemble des critères du cahier des charges :

- le système est stable et  $M_G \approx 45$  dB et  $M_\phi \approx 65^\circ \Rightarrow$  cdcf vérifié,

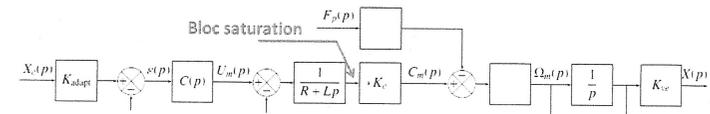
- le système est précis  $\Rightarrow$  cdcf vérifié,

- système ne présente pas de dépassement  $\Rightarrow$  cdcf vérifié,

-  $tr_{5\%} \approx 50$  ms  $\Rightarrow$  cdcf vérifié ( $< 60$  ms).

Par contre, on relève un courant  $I_{mot}^{MAX} \approx 35$  A. Or la carte ELMO ne supporte qu'un courant maximal de 20 A. Le contrôleur ELMO ne permet donc pas de réaliser cette commande.

**Q42.** Dans la modélisation proposée, ce bloc saturation doit être placé entre le bloc  $\frac{1}{R+Lp}$  et le bloc  $K_c$ , car c'est sur cette branche que l'on retrouve la variable intensité (on rappelle que  $C_m(p) = K_c \cdot I_m(p)$ ).



**Q43.** La prise en compte de la saturation rend le système un plus lent, on a alors  $tr_{5\%} \approx 55$  ms ce qui reste acceptable vis-à-vis du cahier des charges ( $< 60$  ms). Les autres performances restent inchangées.