PSI Lycée Clemenceau - Nantes

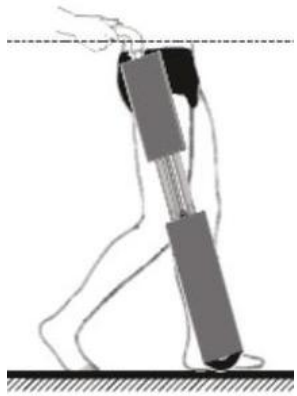
Sciences Industrielles de l'Ingénieur

DS n°1

☞ *Ce devoir comporte un exercice et un problème, totalement indépendants.*

■ L'exercice repose sur un robot porte-outil à mouvement plan de type SCARA. On s'intéresse à sa structure mécanique, à sa cinématique et au calcul de quelques vitesses.
4 points.

■ Le problème est extrait du sujet du concours CCINP PSI 2018, relatif à une canne robotisée. Les questions sélectionnées traitent de cinématique, de l'algorithme de commande, ainsi que de l'asservissement en déplacement du moteur.
16 points .



L'essentiel de la rédaction est à réalisée sur copie libre, hormis quelques réponses au problème à apporter sur le document-réponse fourni.

Aucun document n'est autorisé.

Toute calculatrice autonome est autorisée.

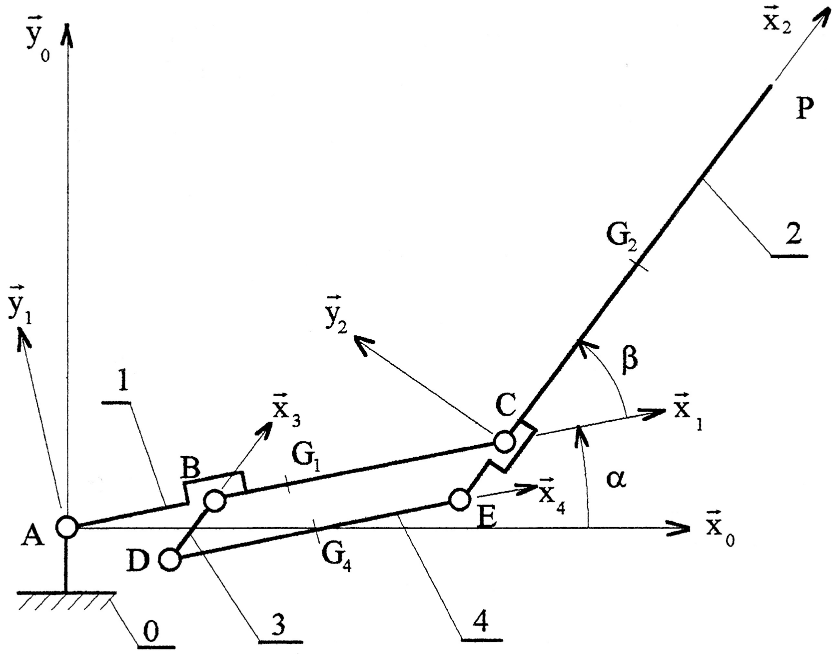
Il sera tenu compte de la qualité de la présentation dans la notation.

Bon courage.

EXERCICE
ROBOT PORTE-OUTIL À MOUVEMENT PLAN

Présentation

L'étude concerne un robot série industriel qui permet, après montage d'un outillage approprié au niveau du poignet qui est fixé à son extrémité, de faire de la découpe par laser, plasma ou chalumeau, ou d'effectuer des opérations de perçage, gravure, collage.
Ses caractéristiques sont données dans l'encadré ci-dessous, avec son schéma cinématique normalisé en vue de dessus.



Notations : G_i : centre d'inertie du solide i
$(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$: base orthonormée directe associée au solide i et telle que $\vec{z}_i = \vec{z}_0$.

Toutes les liaisons entre solides et avec le bâti sont des liaisons pivot d'axes parallèles à $\vec{z}_0$.

Bras 1 (ABC) $\overrightarrow{AB} = 2L\vec{x}_1$ $\overrightarrow{AC} = 6L\vec{x}_1$ $\overrightarrow{AG_1} = 3L\vec{x}_1$ $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \alpha$

Bras 2 (ECP) $\overrightarrow{EC} = L\vec{x}_2$ $\overrightarrow{CP} = 6L\vec{x}_2$ $\overrightarrow{CG_2} = 3L\vec{x}_2$ $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \beta$

Bras 3 (DB) $\overrightarrow{DB} = L\vec{x}_3$ G_3 non défini car masse de 3 négligeable $(\vec{x}_1, \vec{x}_3) = (\vec{y}_1, \vec{y}_3) = \beta$

Bras 4 (DE) $\overrightarrow{DE} = 4L\vec{x}_4$ $\overrightarrow{DG_4} = 2L\vec{x}_4$ $(\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4) = \alpha$

Poignet P non représenté sur le schéma, masse négligeable.

Ce robot est ainsi composé de quatre bras repérés 1, 2, 3 et 4, considérés comme des solides rigides. Le poignet, destiné à recevoir les outillages, est monté à l'extrémité P du bras 2. Il n'est pas représenté sur le schéma et ses mouvements par rapport au bras 2 seront considérés bloqués : ils ne font pas partie de cette étude.

Le robot est commandé par deux motoréducteurs indépendants M1 et M2 :

- M1 pilote la rotation autour de $(A,\vec{z}_0)$ de 1/0 : son stator est lié au bâti 0 et son rotor au bras 1.
- M2 pilote la rotation autour de $(B,\vec{z}_0)$ de 3/1 : son stator est lié au bras 1 et son rotor au bras 3.

1 – Étude structurelle

1) Représenter le schéma cinématique donné précédemment selon une perspective isométrique où $\vec{z}_0$ est la verticale ascendante.

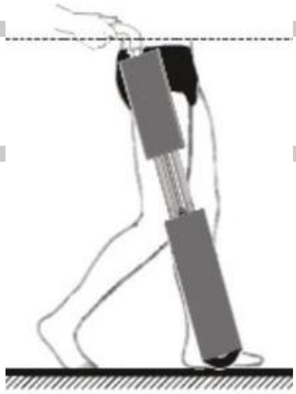
2 – Étude cinématique

21) Déterminer en fonction de la longueur L, des angles α et β et de leurs dérivées $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ par rapport au temps, dans la base où leur expression est la plus simple :

- le torseur cinématique de 1/0
- le torseur cinématique de 3/1
- le torseur cinématique de 4/1
- le torseur cinématique de 2/1
- le torseur cinématique de 2/0.

22) Dans le cas général où $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ sont non nuls et distincts, exprimer en fonction de L, des angles α et β et de leurs dérivées $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ par rapport au temps, dans la base où leur expression est la plus simple :

- le vecteur vitesse angulaire de 4/0 : $\vec{\Omega}(4/0)$
- les vecteurs vitesse par rapport au bâti des centres d'inertie des solides 1, 2 et 4 :
  $\vec{V}(G_1,1/0)$
  $\vec{V}(G_2,2/0)$
  $\vec{V}(G_4,4/0)$



PROBLÈME
CANNE ROBOTISÉE

NB : il s'agit d'un extrait du sujet, ne pas s'étonner s'il manque des pages et des questions.

Présentation générale

L'amélioration de la mobilité des personnes âgées ou rencontrant des troubles de la marche demeure un des enjeux majeurs de l'assistance à la personne.

Un dispositif d'assistance à la marche peut être prescrit lors de l'apparition de troubles de la locomotion. Parmi les nombreux dispositifs proposés, la canne et le déambulateur demeurent les plus utilisés ; l'utilisation de la canne étant privilégiée lors de troubles mineurs ou n'affectant qu'une des deux jambes.

Afin de contribuer à l'amélioration de l'assistance apportée par ces deux dispositifs conventionnels, la robotisation de ceux-ci a été entreprise. Ainsi, de nombreux déambulateurs robotisés ont été conçus afin d'offrir une assistance continue lors de la marche. En revanche, le développement des cannes robotisées s'est traduit par une différenciation marquée par rapport aux cannes conventionnelles (voir **tableau 1**). En effet, l'utilisation de bases mobiles stables sur lesquelles sont fixées des cannes, conduit à l'obtention de dispositif encombrant.

Canne conventionnelle	Canne à base mobile stable composée de 3 roues	Prototype de canne robotisée étudié dans ce sujet
		

Tableau 1 – Évolution des dispositifs d'assistance à la locomotion de type canne

Pour plus de compacité et pour garder les attributs d'une canne conventionnelle, le prototype de canne étudié dans ce sujet est composé d'un axe télescopique et d'une roue à son extrémité, tous deux motorisés. Il conserve ainsi un encombrement réduit et permet de synchroniser les mouvements avec le cycle de la marche. La canne suit ainsi activement le mouvement de la jambe « invalide » durant la phase de balancement et offre un point d'appui stable pendant la phase d'appui.

Partie I - Analyse du cycle de marche

L'objectif de cette partie est d'étudier des cycles de marches saines et perturbées afin de mettre en évidence l'apport d'une canne d'assistance pour améliorer la marche.

L'observation des jambes, effectuée dans le cadre d'un « cycle de marche », permet de distinguer pour chacune d'entre elle une phase d'appui et une phase de balancement (**figure 1**). Ce cycle débute par un appui simple de la jambe droite et le début du balancement de la jambe gauche. Il s'achève lors du décollement du pied gauche du sol.

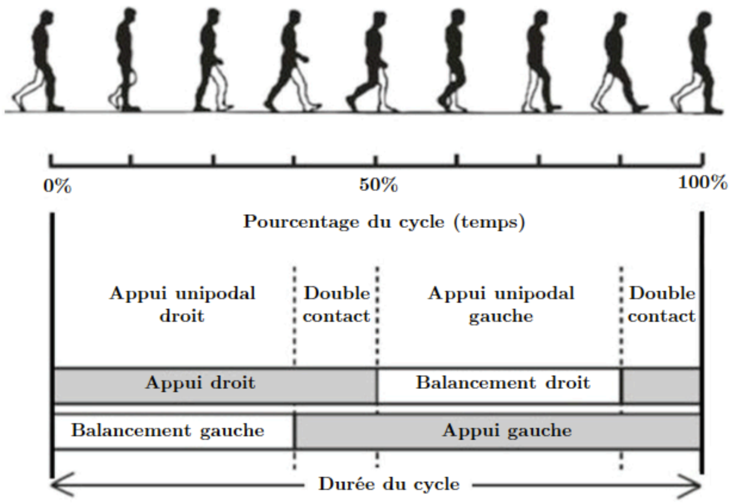


Figure 1 – Représentation du cycle de la marche adopté dans le cadre de notre étude

La marche se distingue de la course à pied par le fait qu'à un moment les deux pieds sont en appui sur le sol (double contact). Durant ce moment, la jambe précédemment en balancement entre en contact avec le sol et un transfert de charge vers celle-ci est initié. Ce transfert de charge est accompagné d'une propulsion du corps vers l'avant exercée par la jambe précédemment en appui.

L'initiation du cycle de la marche sera définie comme indiquée sur la **figure 1** par un appui simple sur la jambe droite. Les **figures 2** et **3** présentent respectivement la définition des différents mouvements des jambes et les évolutions des articulations lors d'un cycle de marche normale.

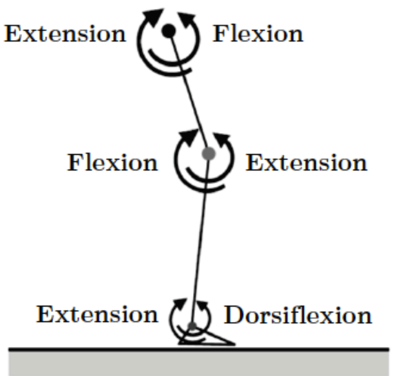


Figure 2 – Représentation des mouvements

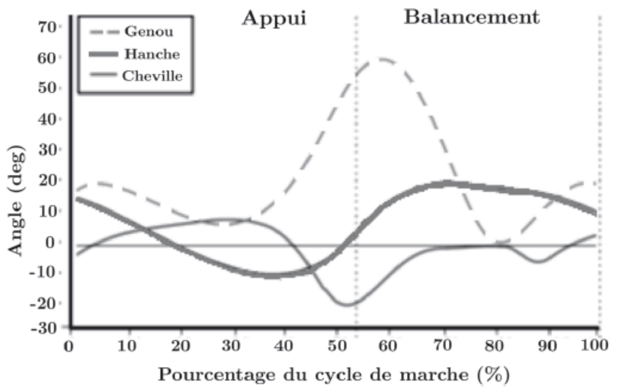


Figure 3 – Évolution des articulations de la jambe durant un cycle de marche normale

Par définition, la position de référence (configuration où les angles de l'articulation de la hanche, du genou et de la cheville sont à 0°) correspond à la position debout jambes tendues. Ainsi, la flexion de la hanche, caractérisée par un angle positif, est définie comme le mouvement rapprochant la cuisse vers le buste. Le mouvement opposé correspond à l'extension.

Afin de mieux caractériser le rôle de la canne, les déambulations de 16 sujets sains à différentes allures (lente, moyenne et rapide) dans le cadre de marches saines, perturbées (genou de la jambe gauche immobilisé à 20° à l'aide d'une attelle) et assistées (canne conventionnelle instrumentée avec un capteur d'efforts 6 axes) sont analysées. Les caractéristiques moyennes du groupe ayant participé au protocole sont détaillées dans le **tableau 2**. Ces caractéristiques étant différentes, les résultats des essais sont normalisés, en divisant chaque donnée par les nombres adimensionnels du **tableau 3** avec $g = 9,81$ m.s^{-2} l'accélération gravitationnelle terrestre.

Données	Unités	Valeur moyenne
Âge	Années	$25,8 \pm 2,3$
Taille	cm	$179 \pm 5,3$
Masse (m_{sujet})	kg	$71,4 \pm 8,5$
Longueur jambe (L_{jambe})	cm	$101 \pm 3,5$

Tableau 2 – Caractéristiques moyennes du groupe avec écarts-types (±)

Résultats	Nombre adimensionnel
Vitesse	$\sqrt{g.L_{jambe}}$
Durée	$\sqrt{L_{jambe}/g}$
Force	$m_{sujet}.g$

Tableau 3 – Grandeurs d'adimensionnement

Les résultats obtenus pour les différentes conditions sont présentés en **figures 4**, **5**, **6** et **7**. Ces courbes représentent l'évolution des efforts normaux exercés par les jambes ou la canne sur le sol. Afin de faciliter l'observation des résultats, ceux relatifs à la jambe droite sont représentés en trait fort et les résultats de la jambe gauche en trait fin. Les écarts-types associés aux résultats sont représentés en pointillés. Le trait continu représente la moyenne.

Pour rappel, le cycle de la marche adopté durant l'étude débute par l'appui simple sur la jambe droite. La jambe gauche sera la jambe équipée des dispositifs contraignants dans le cadre de la marche perturbée et assistée d'une canne. Pour ce dernier cas, la canne est placée du côté de la jambe valide, c'est-à-dire du côté de la jambe droite.

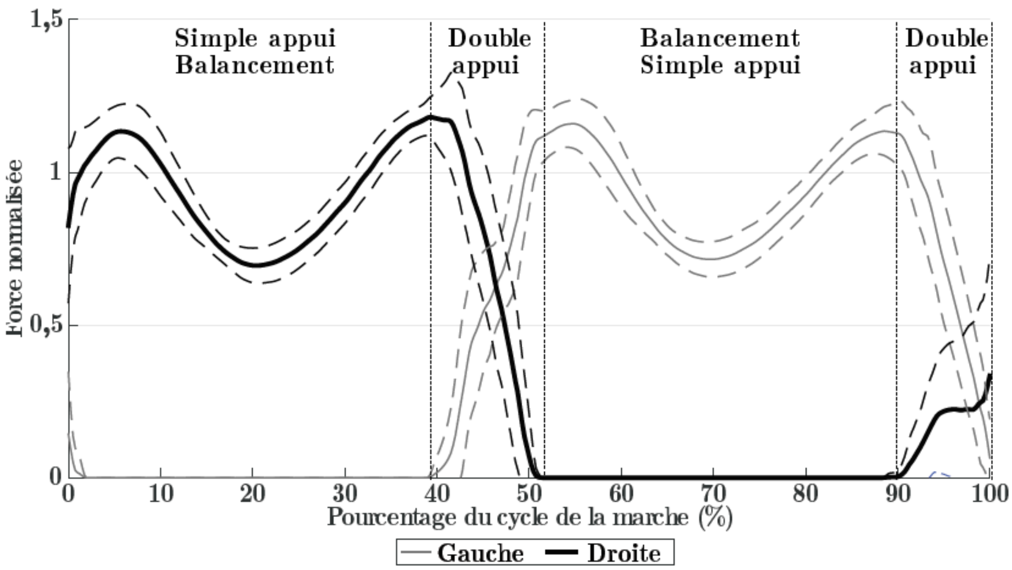


Figure 4 – Efforts normaux générés par les jambes durant un cycle de marche normale à $V = 0,45$ m/s

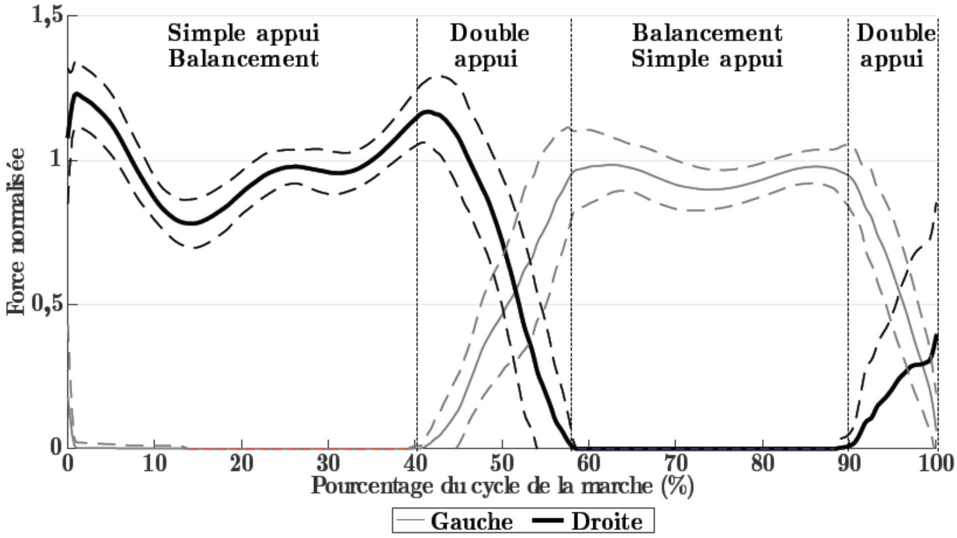


Figure 5 – Efforts normaux générés par les jambes durant un cycle marche perturbée à allure moyenne, $V = 0,22$ m/s

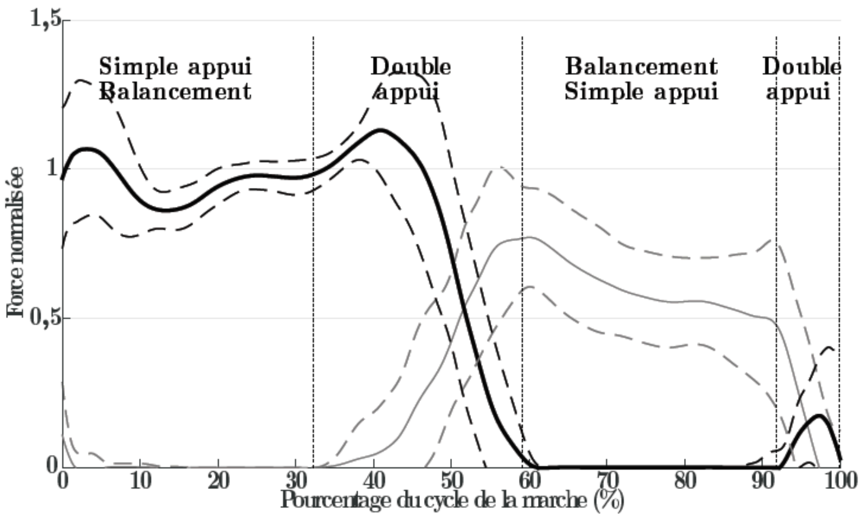


Figure 6 – Efforts normaux générés par les jambes durant un cycle de marche assistée à allure moyenne, $V = 0,22$ m/s

Q1. À partir de l'étude des **figures 4** et **5**, comparer et commenter les évolutions des efforts normaux de chacune des jambes sur le sol et les durées de chacune des phases pour les différents cas : marche saine et marche perturbée.

Q2. À partir de l'étude de la **figure 6** et de la **figure 7** (page 6), préciser le rôle de la canne lors d'une marche assistée. Préciser, en Newton, la valeur moyenne maximale des efforts exercés sur la canne.

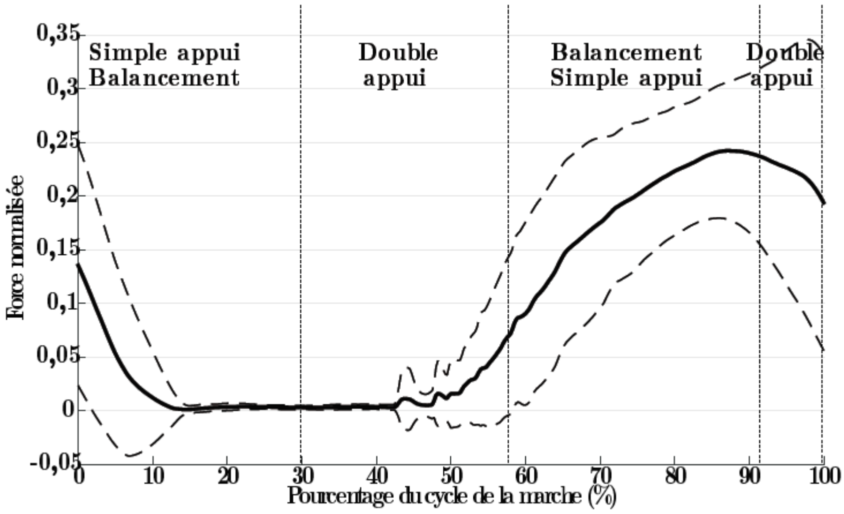


Figure 7 – Efforts normaux générés par la canne durant un cycle de marche assistée à allure moyenne, $V = 0,22$ m/s

Partie II - Présentation du prototype de canne robotisée étudié

La partie précédente a montré l'intérêt d'une canne pour assister un patient à mobilité réduite.

Le prototype de canne robotisée envisagé conserve une forme longiligne, un point d'appui au sol ainsi qu'un encombrement et un poids réduits. La canne robotisée, dont la structure mécanique est présentée en **figure 8**, se compose d'un axe linéaire motorisé et d'une roue motorisée située à son extrémité.

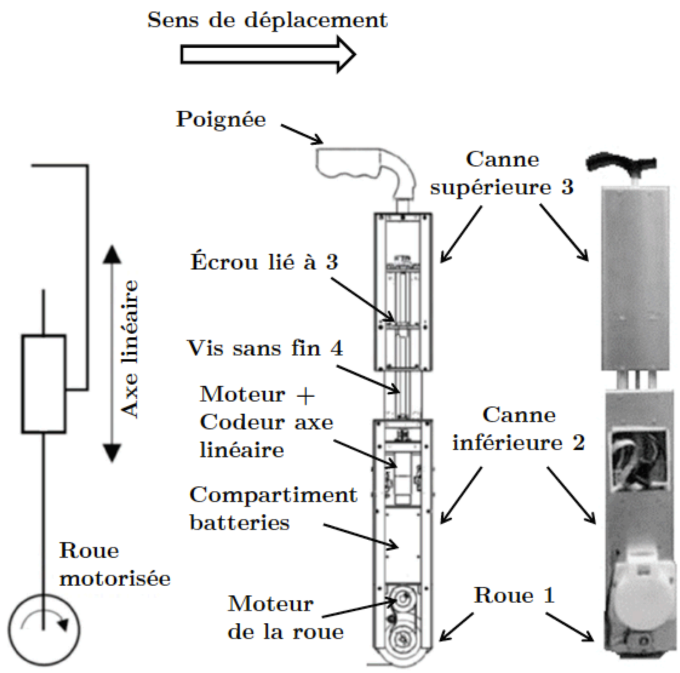


Figure 8 – Schéma cinématique et photographie du prototype de canne robotisée

Les deux degrés de mobilité, rendus possibles par cette structure, permettent de suivre la marche d'un sujet et lui offre un point d'appui. L'avantage est d'éviter aux utilisateurs la manipulation de la canne (levée et positionnement) pendant la marche, la roue restant toujours en contact avec le sol.

Le système de commande, détaillé par la suite, récupère les angles de rotation des deux centrales inertielles équipant respectivement la canne supérieure et le patient. La centrale inertielle du patient est placée sur la hanche de la jambe invalide et permet la synchronisation du mouvement de la canne avec celle-ci, comme nous le verrons par la suite.

On donne dans le **document 1** le diagramme partiel des exigences du prototype de canne robotisée. Le diagramme des blocs internes du **document 2** présente son architecture ainsi que les caractéristiques de ses principaux constituants. La figure du **document 3** donne une représentation schématique de la cinématique de l'ensemble du prototype de canne.

L'actionnement de l'axe linéaire de la canne est assuré par un moteur brushless Maxon ECMax 30 équipé d'un codeur incrémental. La roue 1, située à l'extrémité de la canne, est actionnée par un moteur brushless Maxon EC 60. Les caractéristiques des moteurs sont récapitulées dans le **tableau 4**.

	Moteur axe linéaire brushless Maxon ECMax 30	**Moteur roue** brushless Maxon EC60
Puissance maximale	$P_{MAX} = 60$ W	$P_{MAX} = 100$ W
Vitesse nominale	$Nn = 6\,590$ tr/min	$Nn = 3\,260$ tr/min
Couple nominal	$Cn = 0,0636$ N · m	$Cn = 0,279$ N · m
Tension nominale	$Un = 12$ V	$Un = 12$ V
Courant nominal	$In = 4,72$ A	$In = 9,25$ A
Courant maximal au démarrage	$I_{MAX} = 26,8$ A	$I_{MAX} = 93,5$ A
Constante de couple	$Kc = 14,2.10^{-3}$ N · m/A	$Kc = 30,5.10^{-3}$ N · m/A
Constante de vitesse	$Ke = 14,2.10^{-3}$ V/s	$Ke = 30,5.10^{-3}$ V/s
Résistance aux bornes	$R = 0,447\ \Omega$	$R = 0,128\ \Omega$
Inductance aux bornes	$L = 49.10^{-3}$ mH	$L = 62.10^{-3}$ mH
Moment d'inertie du rotor	$J_{rotor} = 21,9.10^{-7}$ kg · m^2	$J_{rotor} = 1,2.10^{-4}$ kg · m^2

Tableau 4 – Caractéristiques des moteurs brushless du prototype de canne

Le contrôle des moteurs est assuré par deux contrôleurs de vitesse ELMO. Ces variateurs reçoivent les consignes de vitesse du microcontrôleur MBED LPC1768. L'Arduino Due récupère les angles de deux centrales inertielles équipant la canne (par liaison série) et son utilisateur (par liaison Bluetooth).

Notation à utiliser dans les parties suivantes

Les axes du repère $\mathcal{R}_i$ associé au solide i sont notés x_i, y_i et z_i et sa base $\mathcal{B}_i$ associée est notée $(\vec{i}_i, \vec{j}_i, \vec{k}_i)$.

On notera $\left\{T_{i\rightarrow j}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{i\rightarrow j} \\ \vec{M}_{P,i\rightarrow j} \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{cc} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{array} \right\}_{P,\mathcal{B}_k}$, l'expression au point P, en projection dans la base $\mathcal{B}_k$, du torseur de l'action mécanique exercée par le solide i sur le solide j.

On notera $\left\{V_{i/j}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(i/j) \\ \vec{V}(P,i/j) \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_P^x & V_P^x \\ \omega_P^y & V_P^y \\ \omega_P^z & V_P^z \end{array} \right\}_{P,\mathcal{B}_k}$, l'expression au point P, en projection dans la base $\mathcal{B}_k$, du torseur cinématique du mouvement du solide i par rapport au solide j.

Partie IV - Étude de l'exigence 3.1.6 « Commande des axes asservis »

Cette partie a pour objectif d'analyser le mode de distinction des différentes phases de fonctionnement de la canne robotisée.

Lors de la marche avec une canne conventionnelle, il est possible de constater une synchronisation du mouvement de la canne conventionnelle avec celui de la jambe qu'elle assiste. Ainsi, une forte corrélation est observée entre l'angle de la canne et celui de la hanche de la jambe invalide.

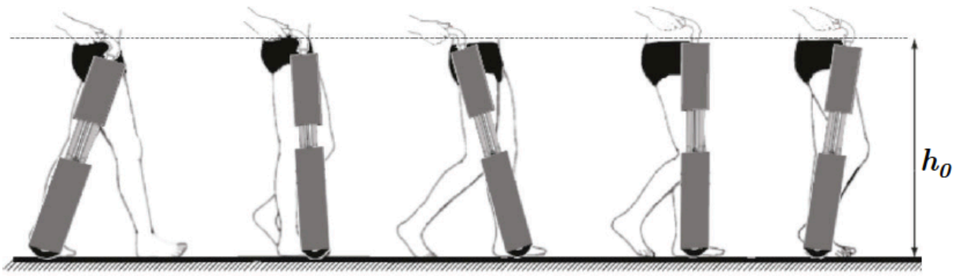


Figure 11 – Synchronisation souhaitée du prototype de canne robotisée avec la marche

Selon la **figure 11**, le mode de commande suivant a été retenu pour contrôler le mouvement du prototype de canne robotisée.

- Lors de la phase de balancement de la jambe invalide, l'angle de la canne active par rapport à la verticale est asservi sur l'angle de la hanche de la jambe invalide. Cette tâche est accomplie en gardant la hauteur de la poignée h_0 constante afin de ne pas perturber la position de la main de l'utilisateur.
- Lors de la phase d'appui de la jambe invalide, la roue est asservie à une vitesse nulle afin d'offrir un point d'appui immobile pour le patient. La longueur de l'axe télescopique est asservie pour garder la hauteur de la poignée h_0 constante de la canne.

Il est donc nécessaire de maintenir la hauteur de poignée h_0 constante pour les deux phases. Ceci impose une relation entre l'inclinaison de la canne et sa longueur.

La figure du **document 4** présente le modèle cinématique et les notations retenues pour le paramétrage du prototype de canne. Sur cette figure, $\ell(t)$ représente la longueur AH, $\theta(t)$ correspond à l'angle d'inclinaison de la canne avec la verticale et R est le rayon de la roue. On note de plus h la hauteur de poignée de la canne par rapport au sol.

Q8. Établir la relation entre $\ell(t)$, $\theta(t)$ et R pour assurer une hauteur constante $h = h_0$.

La détection des phases d'appui et de balancement de la jambe invalide est basée sur une mesure du gyromètre inclus dans la centrale inertielle attachée à la jambe invalide. Lorsque la jambe est en balancement, la rotation de la cuisse s'effectue dans le sens trigonométrique, la rotation a lieu en sens inverse lors de la phase d'appui.

La **figure 12**, page suivante donne l'évolution de la vitesse angulaire fournie par le gyromètre (facteur $\times$ 100) et l'évolution de la variable S identifiant les phases de balancement ($S = 0$) et d'appui ($S = 1$) au cours d'un cycle de marche. Pour éviter la prise en compte des bruits de mesure du gyromètre dans le changements d'état de S, on introduit une valeur réglable de détection appelée *Seuil*.

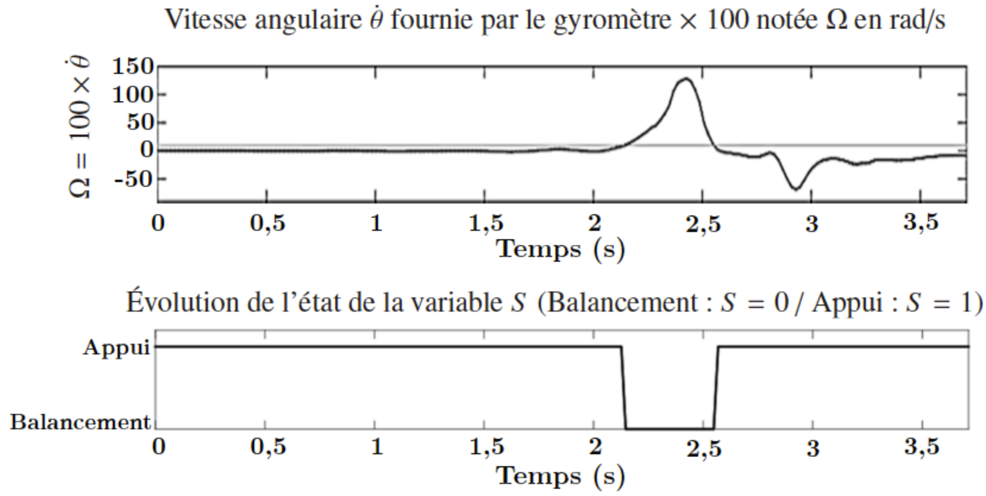


Figure 12 – Évolution de la vitesse angulaire fournie par le gyromètre (facteur × 100) et évolution de la variable S au cours d'un cycle de marche

La stratégie retenue pour la commande des deux degrés de liberté du prototype de canne au cours d'un cycle de marche peut être décrite par le diagramme d'états du **document réponse DR1**. Le **tableau 5** récapitule les variables, états et activités associées, utilisés dans ce diagramme.

Variables	États	Activités associées
• S : balancement $S = 0$ appui $S = 1$ • *Seuil* : valeur réglable de détection • *Marche* : mise en route du système • *Power off* : arrêt de l'alimentation	• Initialisation • Appui • Balancement • Analyse • Procédure d'arrêt	• Lancer le cycle d'initialisation • Asservir la hauteur de la canne • Maintenir une vitesse de roue nulle • Asservir la vitesse de roue • Générer le signal S • Lancer la procédure d'arrêt

Tableau 5 – Variables, états et activités du diagramme d'états de la commande du prototype de canne

Q9. Compléter le diagramme d'états du **document réponse DR1** afin de gérer les asservissements en phase de balancement et d'appui. Pour cela, préciser les valeurs (0 ou 1) de la variable S et les activités associées aux états des phases d'appui et de balancement.

On s'intéresse désormais à l'élaboration de la variable notée S. Pour cela, on décrira l'activité « Générer le signal S » par un algorigramme. Le cahier des charges lié à cette activité est :

- l'algorigramme est actif tant que $Marche = 1$;
- le signal S est élaboré à partir de la vitesse angulaire issue du gyromètre ;
- la valeur de *Seuil* est fixée à 1 % de la valeur absolue maximale de $\Omega = 100\,\dot{\theta}$;
- la variable S doit conserver sa valeur antérieure dans la zone où Ω est comprise entre ±*Seuil*.

Q10. Déterminer la valeur numérique à donner à la variable *Seuil* à partir de la **figure 12**.

Q11. Compléter l'algorigramme du **document réponse DR2** afin de répondre au cahier des charges de l'activité « Générer le signal S ».

Partie V - Modélisation et analyse de la commande lors de la phase de balancement

Cette partie a pour objectif de déterminer les caractéristiques cinématiques de la chaîne d'énergie de la canne pour satisfaire aux exigences du cahier des charges.

Étude de l'exigence 3.1.6.1 « Commande de la roue »

Afin de permettre à la canne de s'asservir sur l'orientation de la jambe à assister, il est nécessaire de déterminer la vitesse de rotation de la roue motorisée. Cependant, ce déplacement de la canne induit par la roue ne doit pas produire de déplacement non-désiré de la main du patient.

On veut donc vérifier à chaque instant $\vec{V}(H,3/0)\cdot\vec{j}_0 = 0$ et $\vec{V}(H,3/0)\cdot\vec{i}_0 = V$, où V est la vitesse de marche du patient. Le **document 4** rappelle les notations et le paramétrage retenus pour cette étude cinématique. La base $\mathcal{B}_0$ notée, $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ est associé au repère $\mathcal{R}_0$.

On rappelle qu'au point I le contact entre la roue 1 et le sol 0 est supposé sans glissement.

On note $\vec{\Omega}(1/2) = -\,\omega(t)\vec{k}_0$.

Q12. Déterminer l'expression de $\vec{V}(H,3/2)$ en fonction de $\dot{\ell}(t)$.

Q13. Déterminer l'expression de $\vec{V}(H,2/0)$ en fonction de R, $\ell(t)$, $\dot{\theta}(t)$ et $\omega(t)$.

Q14. Par composition des vecteurs vitesse, en déduire l'expression de $\vec{V}(H,3/0)$.

Q15. Projeter cette expression dans la base du repère $\mathcal{R}_0$ lié au sol. En déduire l'expression de $\omega(t)$ uniquement en fonction de R, $\ell(t)$, $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ et V.

[…]

Partie VI - Modélisation et analyse de la commande lors de la phase d'appui

[…]

Étude de l'exigence 3.1.6.2 « Commande de l'axe linéaire »

Le maintien d'une hauteur constante lors de la phase d'appui revient finalement à asservir en position le déplacement $x(t)$ de la canne supérieure 3 par rapport à la canne inférieure 2. Au cours de cette phase, l'angle de la hanche varie de 15° à −10°. Cette variation impose un déplacement relatif $x(t)$ quasi linéaire de l'ordre de quelques centimètres. Pour la suite, afin d'ajuster le réglage du correcteur réalisé par le contrôleur ELMO du moteur de l'axe linéaire, on se place dans le cas plus contraignant. Ce cas correspond à une consigne en échelon de 10 mm tout en prenant en compte l'action F_p du patient en H, agissant ainsi comme une perturbation pour le déplacement $x(t)$.

Le modèle causal retenu pour l'étude du comportement de l'axe linéaire perturbé est représenté par le schéma-bloc du **document réponse DR3**. Dans ce modèle, on note :

- $X_c(p)$ la transformée de Laplace de la consigne de déplacement $x_c(t)$ en mètre,
- $X(p)$ la transformée de Laplace du déplacement $x(t)$ en mètre,
- $F_p(p)$ la transformée de Laplace de l'effort exercé par le patient sur la canne $F_p(t)$ en N,
- $\Omega_m(p)$ la transformée de Laplace de la vitesse de rotation du moteur $\omega_m(t)$ en rad/s,

- $C_m(p)$ la transformée de Laplace du couple moteur $C_m(t)$ en $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$,
- $C(p)$ la fonction de transfert du bloc correcteur.

Élaboration du modèle de connaissance de la partie dynamique de l'axe linéaire

Le modèle cinématique de l'axe linéaire retenu pour cette étude est donné en **figure 15**.
Les données et hypothèses de cette étude sont :

- le référentiel lié à la canne est supposé galiléen. Les effets d'inertie dus au mouvement de balancement sont donc négligés devant les autres grandeurs ;
- l'action du patient sur la canne supérieure 3 est considérée selon l'axe (O_2, y_2), tel que $\vec{F}_p(t) = -F_p(t)\,\vec{j}_2$;
- l'ensemble des effets des frottements visqueux ramené au niveau de l'arbre moteur est $f = 1,17.10^{-5}\ \mathrm{N \cdot m \cdot s}$;
- la liaison glissière réalisée par deux douilles à billes est considérée sans frottement ;
- la vis 4 de moment d'inertie $J_{vis} = 1,53.10^{-6}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ est liée au rotor du moteur de moment d'inertie $J_{rotor} = 21,9.10^{-7}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$;
- le pas de la vis sera noté pas ;
- le couple qu'exerce le moteur sur la vis 4 est noté $C_m(t)$;
- la vitesse de rotation du moteur et de la vis sera notée $\omega_m(t)$;
- la vitesse de déplacement de 3 par rapport à 2 est notée $V_m(t)$;
- la masse de la canne supérieure est $M_3 = 1$ kg.

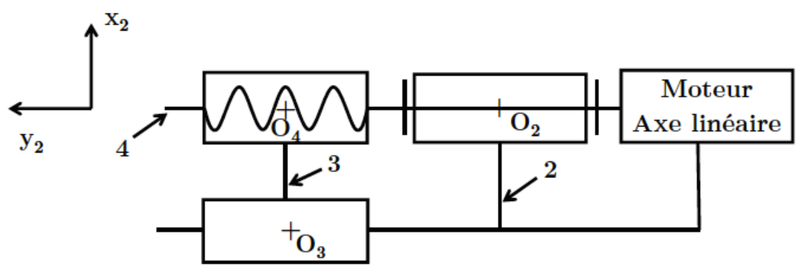


Figure 15 – Modélisation cinématique de l'axe linéaire

[…]

Modélisation de la chaîne d'énergie de l'axe linéaire

On considère pour la suite que le moteur brushless adopte le même comportement que celui d'un moteur à courant continu. Les équations de comportement sont rappelées ci-après :

$$u_m(t) = e(t) + R.i_m(t) + L.\frac{di_m(t)}{dt}, \quad e(t) = K_e.\omega_m(t) \quad \text{et} \quad C_m(t) = K_c.i_m(t).$$

On notera $U_m(p)$ respectivement $I_m(p)$, $C_m(p)$ et $E(p)$ les transformées de Laplace des variables $u_m(t)$ la tension moteur, respectivement $i_m(t)$, le courant moteur, $C_m(t)$, le couple moteur et $e(t)$, la force contre-électromotrice.

Le dispositif vis/écrou permettant la transformation de l'angle de rotation de la vis (en radians) en déplacement de l'écrou (en mètre) est modélisé par le bloc de gain pur K_{ve}. Le comportement du codeur incrémental est modélisé par un gain pur K_{codeur}. On précise que la sortie de ce bloc est de type numérique (en incréments) et l'entrée est une position angulaire (en radians).

Q28. Déterminer, à partir des données du diagramme de blocs internes, les expressions puis les valeurs numériques de K_{ve} et K_{codeur}.

On place en amont du comparateur un bloc de gain pur K_{adapt} de manière à convertir la consigne $X_c(p)$ en une grandeur en incréments directement comparable à la sortie $\theta_{mes}(p)$ du capteur. La valeur du gain pur K_{adapt} est prise de manière à ce que l'écart $\varepsilon(p)$ soit nul lorsque $X_c(p) = X(p)$.

Q29. Donner l'expression, puis la valeur numérique du gain pur K_{adapt} permettant de satisfaire cette condition.

Modèle comportemental

Afin de proposer une modélisation simplifiée de la chaîne d'énergie de l'axe linéaire, une simulation du modèle précédent en boucle ouverte, non perturbé, a été réalisée. Le **document réponse DR4** présente la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte à l'aide du diagramme de Bode (courbe de gain $G_{BO}(\omega)$ et courbe de phase $\varphi_{BO}(\omega)$).

Q30. À partir du diagramme de Bode, proposer un modèle de comportement du système en boucle ouverte. Soit $H_{BO\_1}(p)$ cette fonction de transfert, donner sa forme canonique factorisée. Soient T_1 et T_2, telles que $T_1 < T_2$, les constantes de temps introduites et K_{BO} le gain de $H_{BO\_1}(p)$, préciser les valeurs numériques et unités de T_1, T_2 et K_{BO}. Vous laisserez apparaître les traits de construction nécessaires à l'identification du modèle sur le **document réponse DR4**.

Lors d'une marche saine à allure rapide la cadence moyenne est de 113 pas par minute.

Q31. Déterminer la fréquence moyenne en Hz de la marche saine à allure rapide.

Pour la suite, on considérera que la fréquence maximale de déplacement de l'axe linéaire de la canne (liée au mouvement de la marche) est fixée à $F_{MAX} = 4$ Hz. On propose alors en première approximation une modélisation du comportement du système en boucle ouverte par une fonction de transfert $H_{BO}(p)$ de la forme $H_{BO}(p) = K_{BO}/p$ avec $K_{BO} = 1/30$.

Q32. Justifier, à l'aide de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte, la validité de cette modélisation approchée.

Correction proportionnelle

Pour la suite, on modélise le comportement du système en boucle ouverte par $H_{BO}(p) = K_{BO}/p$ avec $K_{BO} = 1/30$. On considère un correcteur à action proportionnelle tel que $C(p) = K_{corr} = 1$.
Le schéma-bloc du système non perturbé correspond alors à celui de la **figure 16**, page suivante.

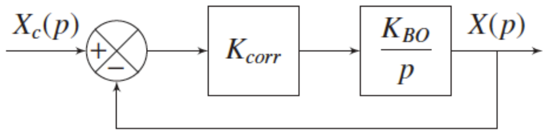


Figure 16 – Schéma-bloc simplifié du système non perturbé avec $C(p) = K_{corr}$

Q33. Déterminer l'expression de $H_{BF}(p) = X(p)/X_c(p)$, la fonction de transfert en boucle fermée de la modélisation de la **figure 16**. Déterminer les paramètres caractéristiques de $H_{BF}(p)$ et en déduire les performances de cette modélisation pour $C(p) = K_{corr} = 1$. Conclure vis-à vis des exigences d'asservissement de l'axe linéaire.

On se propose de modifier la valeur de K_{corr} de manière à vérifier l'exigence de rapidité de l'asservissement.

Q34. Déterminer la valeur numérique à donner à K_{corr} pour assurer le temps de réponse à 5 % lié à l'exigence de rapidité de l'asservissement de l'axe linéaire.

La **figure 17** donne l'évolution de la réponse temporelle $x(t)$ du système réel non perturbé à un échelon en déplacement de valeur finale $X_c = 10$ mm, pour une correction proportionnelle $K_{corr} = 1\,500$.

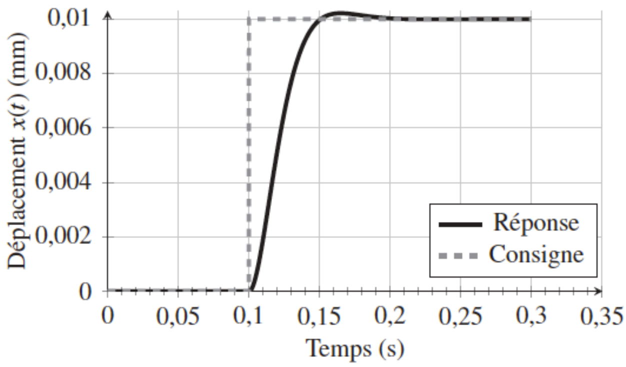


Figure 17 – Évolution de la réponse temporelle $x(t)$ du système réel non perturbé à un échelon de valeur $X_c = 10$ mm, pour $K_{corr} = 1\,500$

Q35. L'évolution de la réponse du système est-elle cohérente avec le comportement du modèle retenu ? Justifier. Quelle modification faudrait-il apporter au modèle approché pour retrouver cette forme de réponse temporelle ?

Pour la suite, on modélise la fonction de transfert en boucle ouverte du système par $H_{BO}(p) = \frac{1}{p} . \frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO} p}$ avec $K_{BO} = 1/30$ (unité en s^{-1}) et $\tau_{BO} = 9$ ms.

Q36. Quelle valeur maximale de K_{corr}, notée K_{corr}^{MAX}, permet de vérifier les critères de précision et de dépassement de l'asservissement de l'axe linéaire ?

Q37. Déterminer la valeur du temps de réponse à 5 %, $tr_{5\%}$ de ce modèle pour $K_{corr} = K_{corr}^{MAX}$ à partir de l'abaque du temps de réponse réduit donné dans le **document 6**.

La **figure 18** donne les évolutions des réponses temporelles $x(t)$ du système réel avec prise en compte de la perturbation (F_p constante et égale à 175 N) à un échelon en déplacement de valeur finale X_c = 10 mm, pour une correction proportionnelle K_{corr} = 1 500 et pour $K = K_{corr}^{MAX}$.

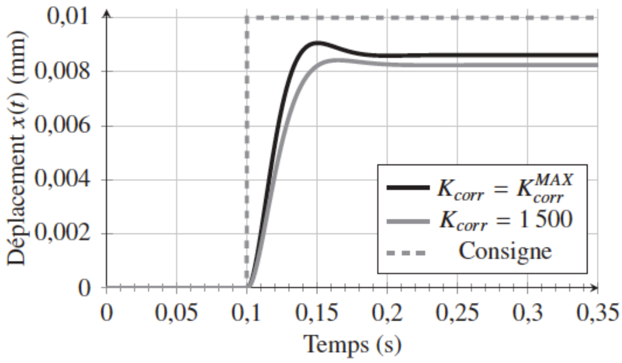


Figure 18 – Réponses temporelles $x(t)$ du système réel perturbé à un échelon en déplacement de valeur finale X_c = 10 mm, pour une correction proportionnelle K_{corr} = 1 500 et pour $K = K_{corr}^{MAX}$

Q38. Conclure sur les capacités de la correction à action proportionnelle pure vis-à-vis des performances à atteindre.

Correction avec action proportionnelle et intégrale généralisée – correcteur PI généralisé

Le correcteur finalement retenu est un correcteur avec action proportionnelle et intégrale généralisée. La fonction de transfert $C(p)$ prend alors la forme suivante :

$$C(p) = K_{corr}.\frac{1 + T_d p}{p} \text{ avec } K_{corr} >> 1 \text{ et } T_d < 1 \text{ s.}$$

On donne dans le **document réponse DR5** le diagramme de Bode (courbe de Gain et de Phase) du système en boucle ouverte avec correcteur PI Généralisé pour K_{corr} = 1 000 et $T_d = 0,2$ s.

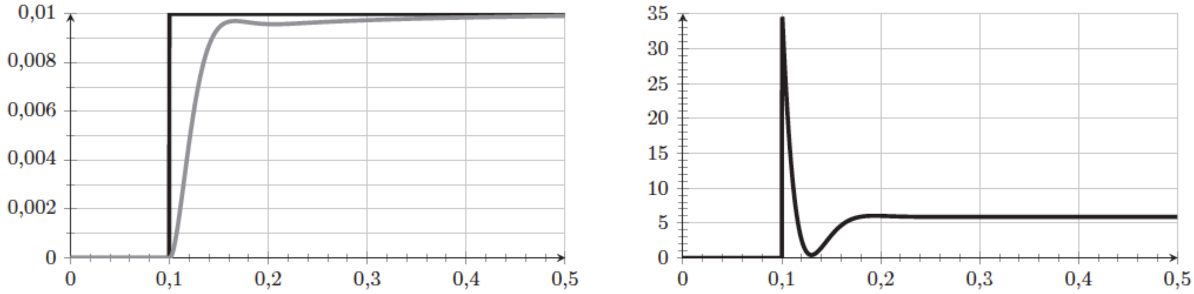
Q39. Représenter sur le **document réponse DR5** les marges de Gain M_G et de Phase M_ϕ du système corrigé.

Avec cette correction, le système est précis mais les valeurs des marges de gain et de phase sont telles que le système n'est pas assez rapide. Il est donc nécessaire d'augmenter la valeur de K_{corr}, tout en conservant $T_d = 0,2$ s, de manière à augmenter la bande passante du système et ainsi se rapprocher des valeurs limites de marge de Gain et de Phase autorisées.

Q40. En déduire la valeur maximale à donner au gain K_{corr}, en conservant $T_d = 0,2$ s, afin de respecter les performances en stabilité de l'asservissement de l'axe linéaire tout en augmentant au maximum la bande passante du système.

Les **figures 19a** et **19b**, page suivante, donnent la réponse temporelle à un échelon de consigne X_c = 10 mm du système simulé, perturbé et corrigé du déplacement $x(t)$ (en mm) ainsi que l'évolution de l'intensité simulée (en Ampères) circulant au sein du moteur.

Q41. Conclure sur les performances du système perturbé vis-à-vis des exigences de l'asservissement de l'axe linéaire. Commenter l'évolution de l'intensité simulée avec les caractéristiques de la carte de commande du moteur.



(a) Déplacement (mm) en fonction du temps (s)

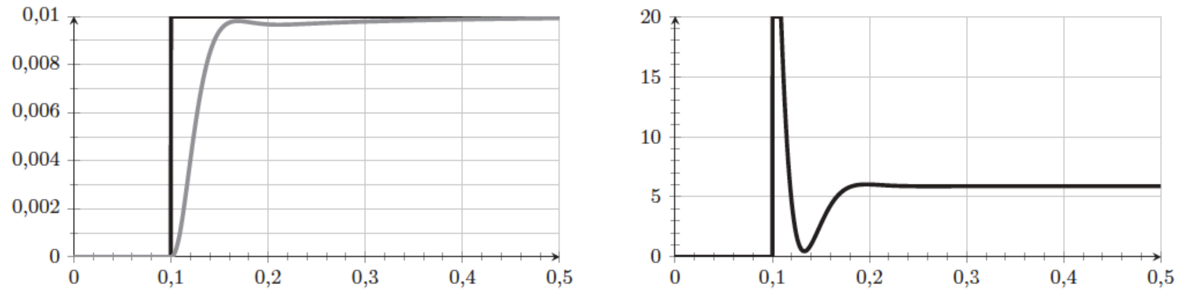
(b) Intensité simulée (A) en fonction du temps (s)

Figure 19 – Réponses temporelles à un échelon d'amplitude $X_c = 10$ mm du système simulé, perturbé et corrigé

Le variateur du moteur permet de protéger les éléments électroniques des surintensités qui pourraient apparaître lors de la commande. Afin de prendre en compte cette protection, on décide d'ajouter dans le modèle causal représenté dans le **document réponse DR3** un bloc saturation de valeur ± 20 A.

Q42. Préciser, à l'aide d'une flèche sur le **document réponse DR3**, la position de ce bloc saturation. Justifier.

Les **figures 20a** et **20b** donnent respectivement la réponse temporelle du déplacement (en mm) à un échelon de consigne $X_c = 10$ mm et l'évolution de l'intensité simulée (en Ampère) circulant au sein du moteur pour le système corrigé avec perturbation et ajout du bloc saturation ± 20 A.



(a) Déplacement (mm) en fonction du temps (s)

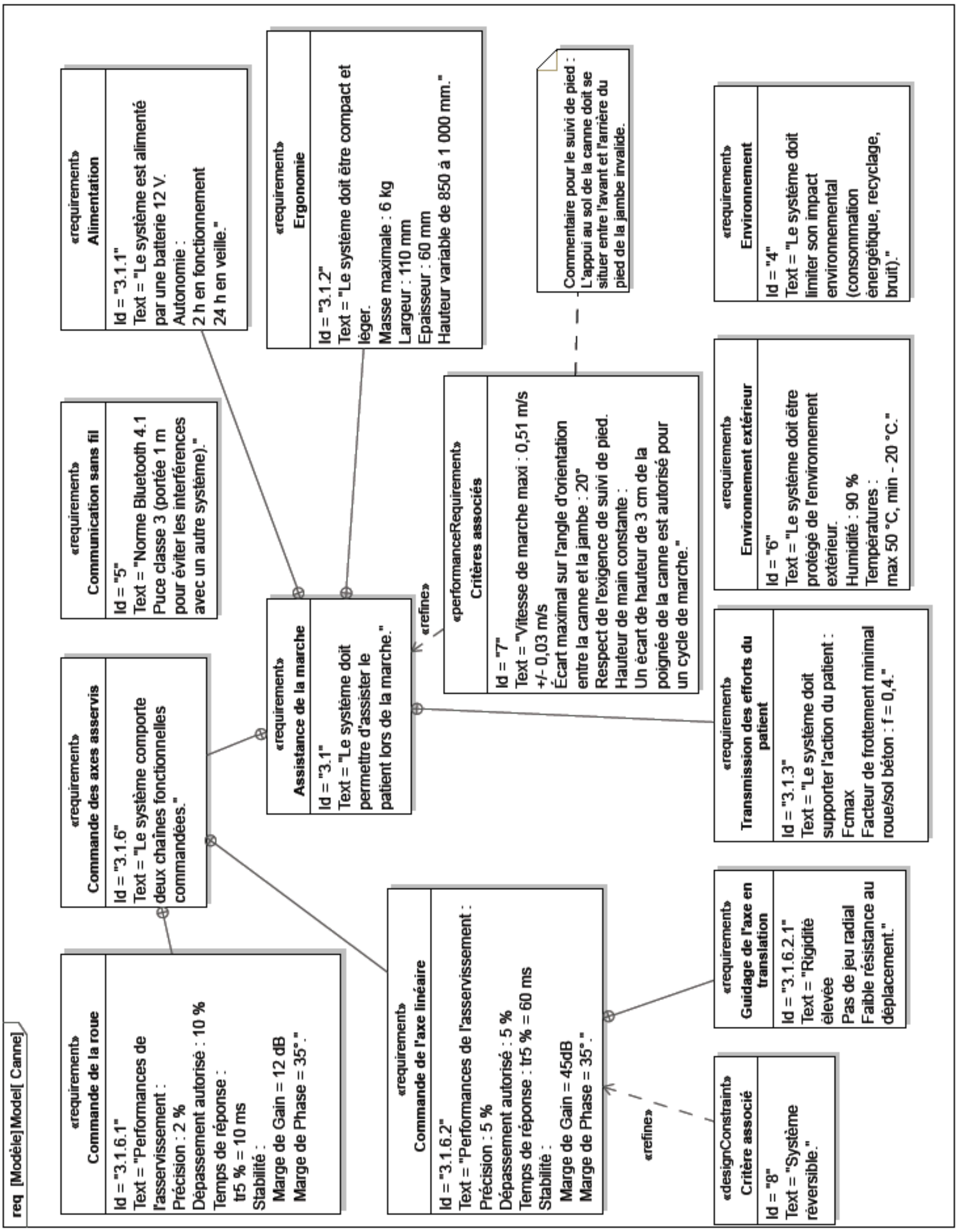
(b) Intensité simulée (A) en fonction du temps (s)

Figure 20 – Réponses temporelles à un échelon d'amplitude $X_c = 10$ mm du système simulé, perturbé et corrigé **avec bloc de saturation ± 20 A**

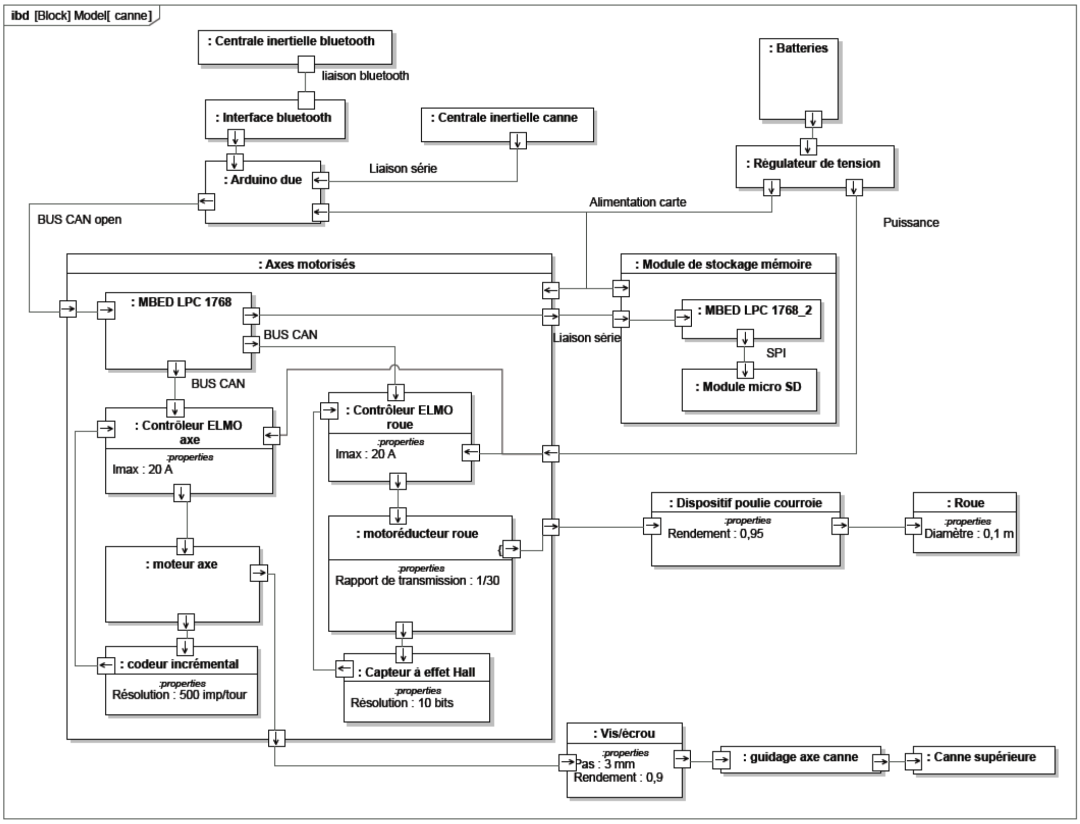
Q43. Quel est l'effet de l'ajout du bloc saturation en intensité sur les performances du système ? Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

ANNEXE

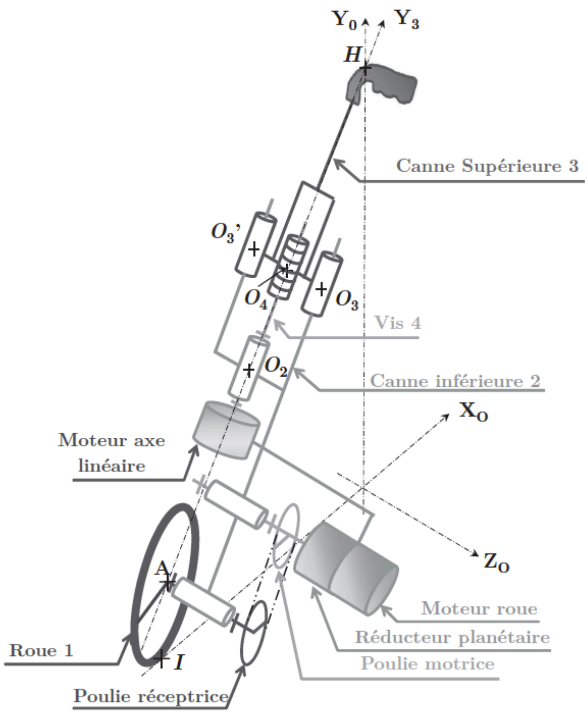
Document 1 - Diagramme partiel des exigences



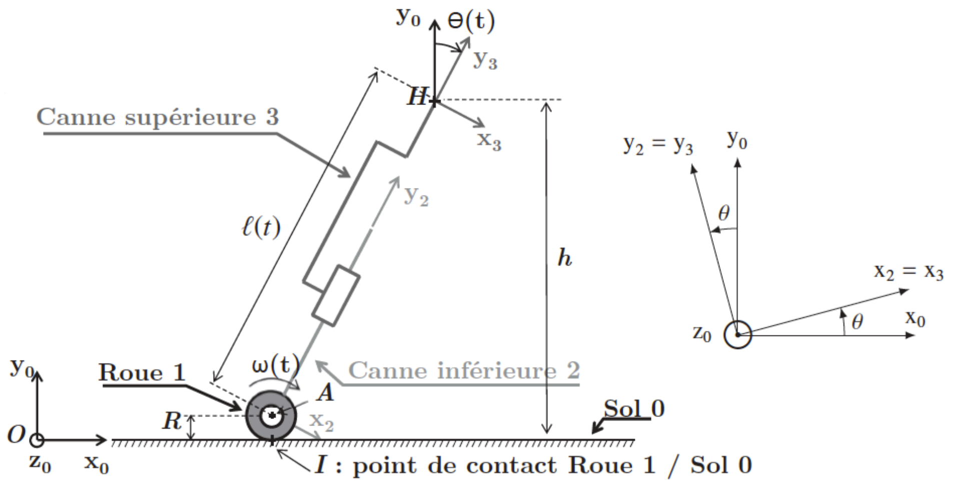
Document 2 - Diagramme de blocs internes



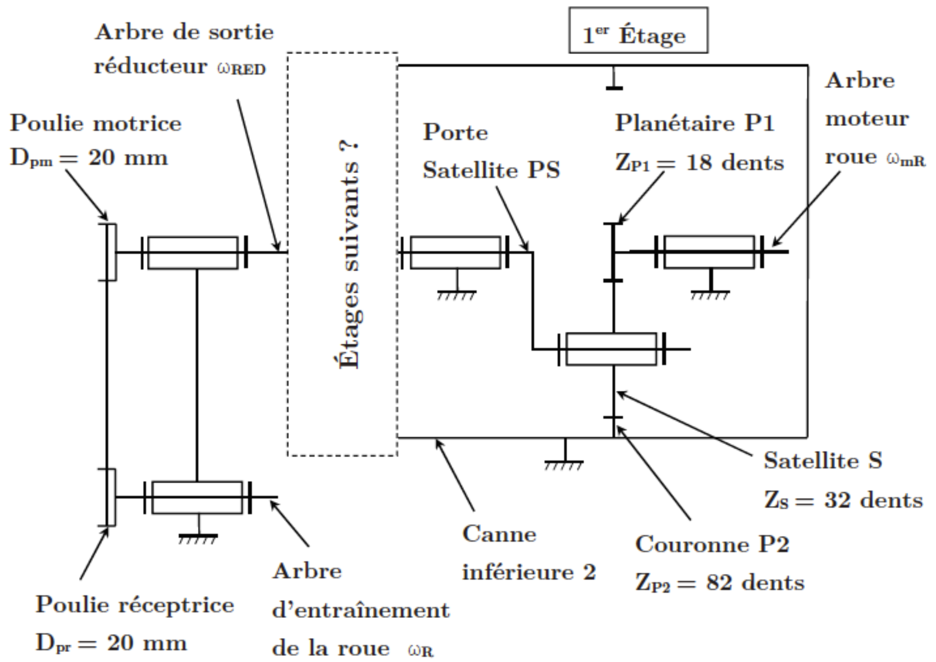
Document 3 - Représentation schématique de la cinématique du prototype de canne



Document 4 - Modélisation cinématique et paramétrage du prototype de canne robotisée



Document 5 - Modélisation cinématique de la transmission du moteur de roue à la roue



Document 6 - Abaque du temps de réponse réduit